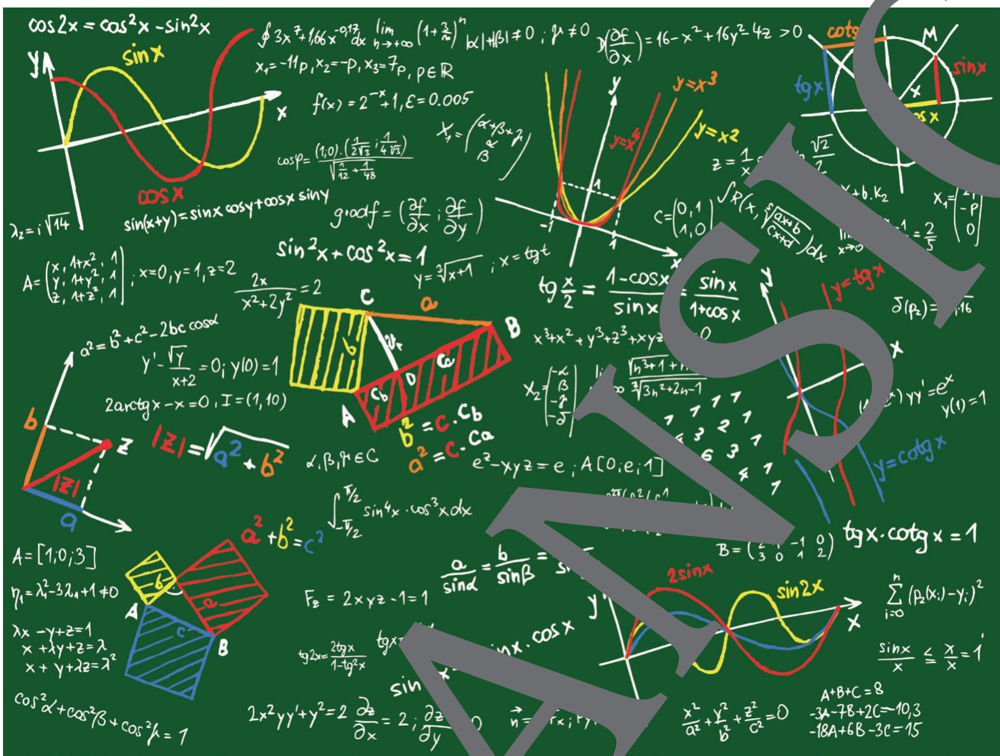
II.30

Funktionaler Zusammenhang

Sinus und Kosinus am Einheitskreis – Trigonometrie anschaulich unterrichten

Ein Beitrag von Diana Hauser



© EtiAmmos/iStock/Getty Images Plus

Sinus und Kosinus sind den Lernenden von trigonometrischen Berechnungen an rechtwinkligen und allgemeinen Dreiecken aus der Mittelstufe bekannt, Winkel zwischen 0° und 180° konnten dort ohne tiefere Kenntnisse berechnet werden. Doch was verbirgt sich eigentlich hinter Sinus und Kosinus, sind sie auch für Winkel größer als 180° definiert? In diesem Beitrag sollen sich die Schülerinnen und Schüler mit Sinus und Kosinus am Einheitskreis beschäftigen und letztlich die Graphen der beiden Funktionen mithilfe einer Bastelvorlage selbst herleiten.

KOMPETENZPROFIL

LearningApps - interaktive Lernbausteine

Klassenstufe: 10
Dauer: 5 Unterrichtsstunden
Inhalt: Sinus, Kosinus, Einheitskreis, Sinusfunktion, Kosinusfunktion
Kompetenzen: mathematisch argumentieren (K1), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4)

Auf einen Blick

Ab: Arbeitsblatt; Mb: Merkblatt
Planung für 5 Stunden

Einstieg

M 1 (Ab) Sinus und Kosinus in Dreiecken

Erarbeitung

M 2 (Ab) Sinus am Einheitskreis
M 3 (Ab) Kosinus am Einheitskreis
M 4 (Ab) Sinusfunktion
M 5 (Ab) Kosinusfunktion

Ergebnissicherung

M 6 (Mb) Sinus- und Kosinusfunktion

Übungen

M 7 (Ab) Vermischte Aufgaben zu Sinus und Kosinus

Test

M 8 ([illegible]) Sinus und Kosinus – Alles verstanden?

Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 20.

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für drei Stunden mit den folgenden Materialien:

M 1 (Ab) Sinus und Kosinus in Dreiecken
M 2 (Ab) Sinus am Einheitskreis
M 3 (Ab) Kosinus am Einheitskreis
M 4 (Ab) Sinusfunktion
M 7 (Ab) Vermischte Aufgaben zu Sinus und Kosinus: Aufgaben 1, 2, 3, 4a

Einstieg: Sinus und Kosinus in Dreiecken M 1

1. Winkel zwischen 0° und 90°

WISSEN

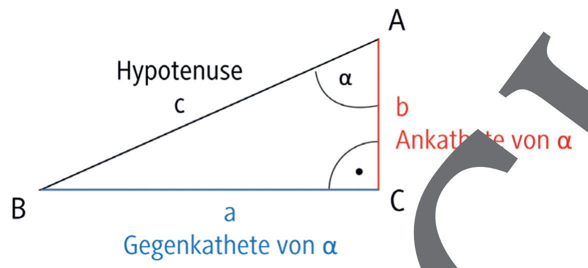
Satz des Pythagoras:

$a^2 + b^2 = c^2$

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$



https://raabe.click/ma-Trigonometrie-2

Typische Aufgaben

Aufgabe 1

In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Katheten a = 4,5 cm u[illegible]d b = 3,6 cm lang.

a) **Berechne** die Länge der Hypotenuse c.

b) **Berechne** die Winkel α und β.

Runde auf zwei Nachkommastellen.

Aufgabe 2

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypote[illegible]kel beträgt $\alpha = 30°$.

a) **Berechne** die Länge der Seite a.

b) **Berechne** die Länge der Seite b.

Runde auf zwei Nachkommastellen.

Sinus- und Kosinuswe[illegible]e für [illegible]inke[illegible]schen 0° und 90°

Aufgabe 3

a) **Fülle** die Tabelle **aus**. **Runde** [illegible] zwei Nachko[illegible]astellen.

α	[illegible]	10°	30°	45°	60°	80°	90°
sin(α)							
cos(α)							

b) [illegible]schre[illegible]urz, was dir a[illegible] den Werten auffällt.

___

___

___

___

Grundlagen üben mit diesen *LearningApps*

https://learningapps.org/watch?v=puds5gxoc22

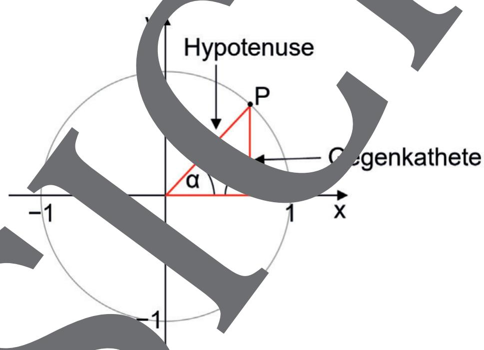
M 2 Erarbeitung I: Sinus am Einheitskreis

Ziel: Sinuswerte für beliebige Winkel

Über die Berechnung in allgemeinen Dreiecken konnten Sinus- und Kosinuswerte am Halbkreis, also von 0° bis 180°, berechnet werden. Diese Anschauung soll nun auf den Vollkreis, also 0° bis 360°, erweitert werden. Zur Vereinfachung werden alle Berechnungen am Einheitskreis geführt. Der Einheitskreis ist ein Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems und mit Radius 1.

Du kennst bereits die Formel $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$.

Für das rechtwinklige Dreieck im Einheitskreis ergibt sich:



Grafik: Diana Hauser

Löst die Aufgaben 1 bis 3 zu zweit.

Aufgabe 1

Fülle die Lücken.

a) Eine Ecke des rechtwinkligen Dreiecks liegt im ________________, eine Ecke (P) liegt auf dem ____________________.

b) Die Hypotenuse hat die Länge ______, die Gegenkathete entspricht der _______-Koordinate.

c) Es gilt: $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\square}{\square} \Rightarrow y = \square$

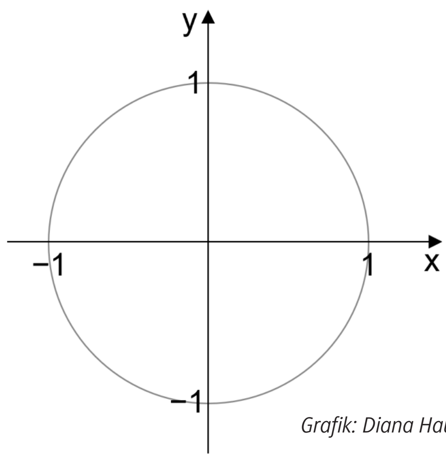
Im Einheitskreis gibt also die y-Koordinate des Punktes P den Sinuswert an. Nun lassen wir den Punkt P auf dem Einheitskreis wandern und betrachten das Vorzeichen des Sinuswerts.

Aufgabe 2

a) **Fülle** die Vorzeichentabelle für den Sinuswert **aus**.

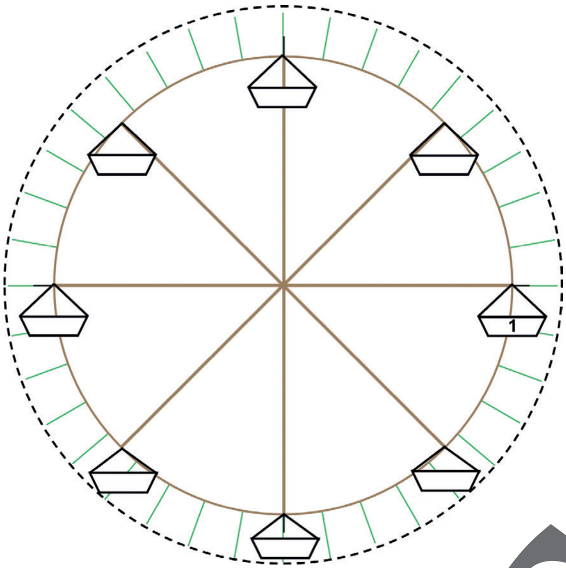
b) **Zeichne** für jeden Quadranten ein passendes Beispiel im Einheitskreis.

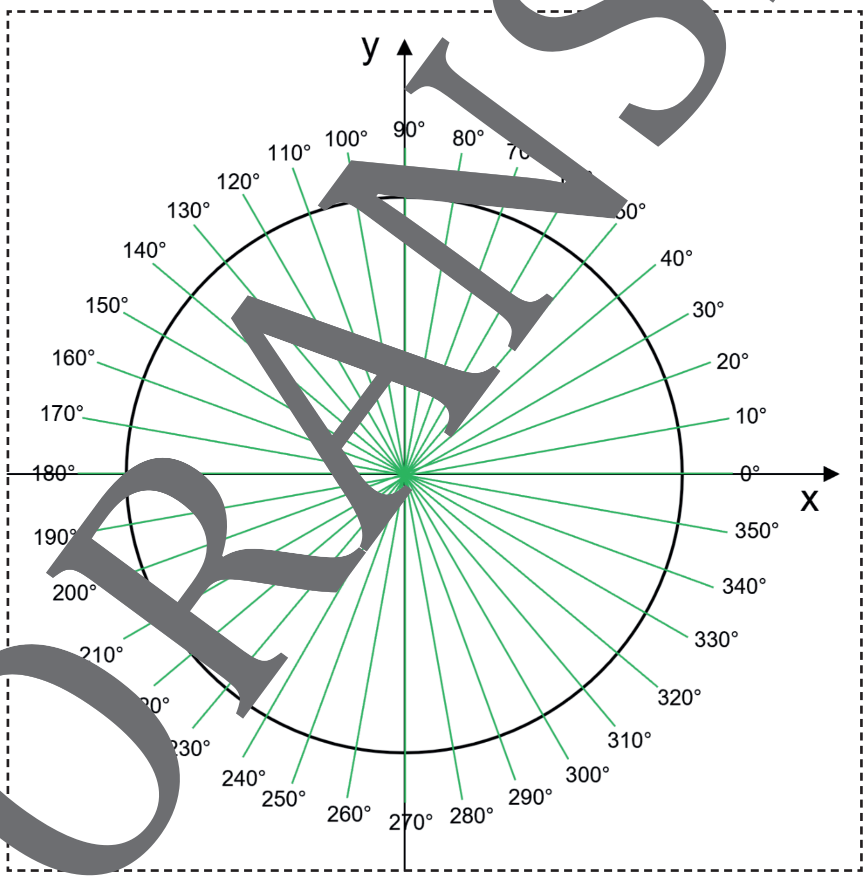
P im II. Quadranten Vorzeichen sin:	**P im I. Quadranten** Vorzeichen sin:
P im III. Quadranten Vorzeichen sin:	**P im IV. Quadranten** Vorzeichen sin:



Grafik: Diana Hauser

M 4b Bastelvorlagen





Grafiken: Diana Hauser

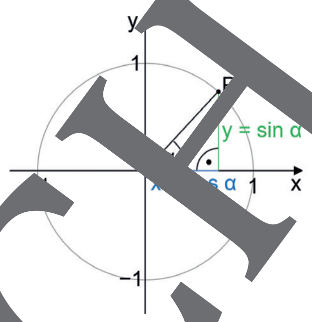
M 6 Ergebnissicherung: Sinus- und Kosinusfunktion

https://raabe.click/ma-Trigonometrie-3

Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Der Sinus ordnet jedem Winkel α die y-Koordinate des zugehörigen Punktes auf dem Einheitskreis zu.

Der Kosinus ordnet jedem Winkel α die x-Koordinate des zugehörigen Punktes auf dem Einheitskreis zu.



Grafik: Diana Hauser

Wichtige Beziehungen:

$\sin(\alpha) = \sin(180° - \alpha)$ $\cos(\alpha) = -\cos(180° - \alpha)$

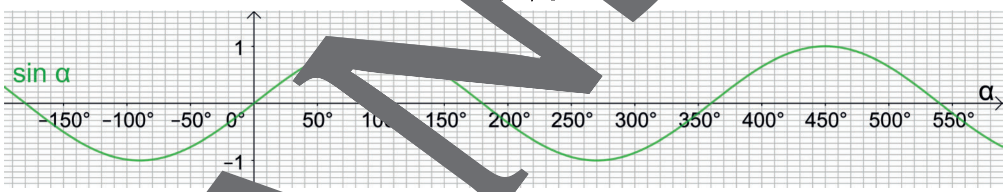
$\sin(\alpha) = -\sin(360° - \alpha)$ $\cos(\alpha) = \cos(360° - \alpha)$

$\sin(\alpha) = -\sin(180° + \alpha)$ $\cos(\alpha) = -\cos(180° + \alpha)$

$\sin(\alpha) = \sin(360° + \alpha)$ $\cos(\alpha) = \cos(360° + \alpha)$

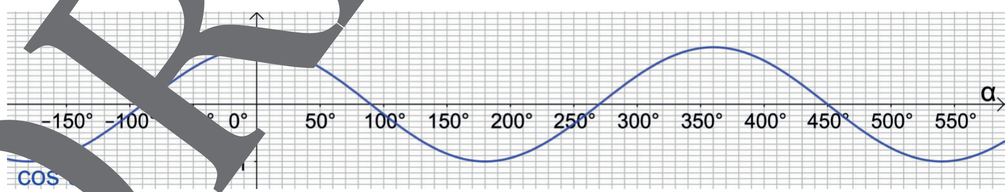
Sinusfunktion

Die Sinusfunktion ist eine periodische Funktion, die ihren Verlauf alle 360° wiederholt. Die Funktionswerte nehmen nur Werte im Bereich [−1;1] an.



Kosinusfunktion

Die Kosinusfunktion ist eine periodische Funktion. Sie ist die um 90° nach links verschobene Sinusfunktion.



Man spricht bei den beiden Funktionen auch von Winkelfunktionen.

Übung: Vermischte Aufgaben zu Sinus und Kosinus

M 7

Aufgabe 1

Der Einheitskreis ist im Maßstab 3:1 gezeichnet.

a) **Lies** die Werte für Sinus und Kosinus am Einheitskreis ab.
Runde dein Ergebnis auf 2 Nachkommastellen.

sin(50°) ≈ ________________

cos(50°) ≈ ________________

sin(200°) ≈ ________________

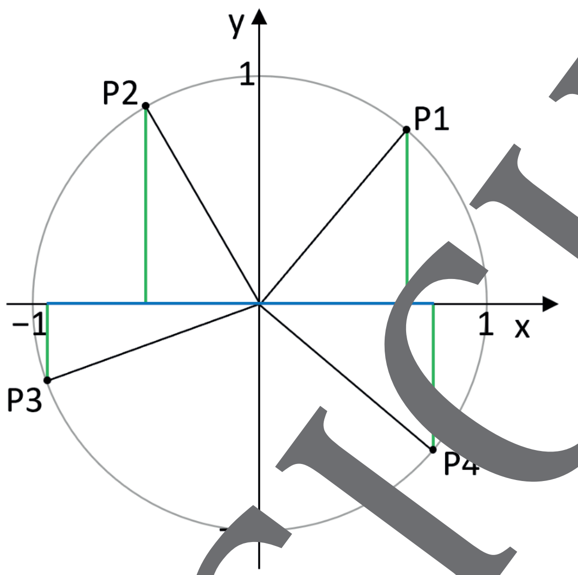
cos(200°) ≈ ________________

sin(130°) ≈ ________________

cos(130°) ≈ ________________

sin(320°) ≈ ________________

cos(320°) ≈ ________________



Grafik: Diana Hauser

b) **Rechne** mit dem Taschenrechner die exakten Werte aus. **Runde** auch diese wieder auf 2 Nachkommastellen und **vergleiche** sie mit den abgelesenen Werten aus Teilaufgabe a).
Beurteile so deine eigene Genauigkeit.

Aufgabe 2

Entscheide anhand des Einheitskreises, welcher Wert plausibel ist.

a) cos(45°) ≈ ☐ 0,1 ☐ −0,5 ☐ 0,3 ☐ [illegible]

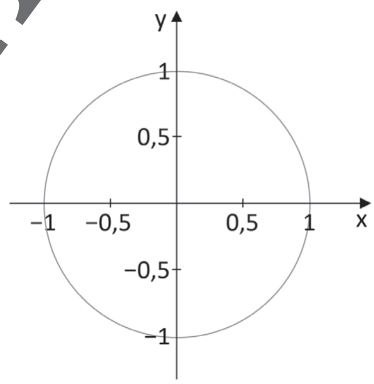
b) sin(110°) ≈ ☐ −0,3 ☐ 0,9 ☐ 0,2 ☐ −0,5

c) sin(245°) ≈ ☐ −0,1 ☐ [illegible] ☐ −0,9 ☐ 1

d) cos(180°) ≈ ☐ 0 ☐ −0,5 ☐ 0,5 ☐ −1

e) cos(300°) ≈ ☐ [illegible] ☐ [illegible] ☐ 1 ☐ 0,1

f) sin(20°) ≈ ☐ 0,3 ☐ 0,5 ☐ 0,8 ☐ −0,2



Grafik: Diana Hauser

Aufgabe 3

Kreuze richtig oder falsch passend **an**.

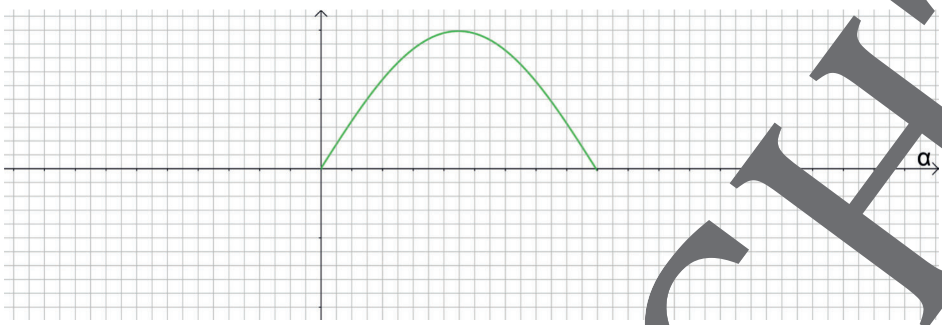
	richtig	falsch
sin(30°) = sin(150°)		
sin(100°) = [illegible](360°)		
sin(110°) = sin(470°)		
sin(45°) = −sin(225°)		

	richtig	falsch
cos(50°) = cos(330°)		
cos(90°) = cos(180°)		
cos(180°) = −cos(360°)		
cos(45°) = −cos(225°)		

https://learningapps.org/watch?v=ppnjo4evj22

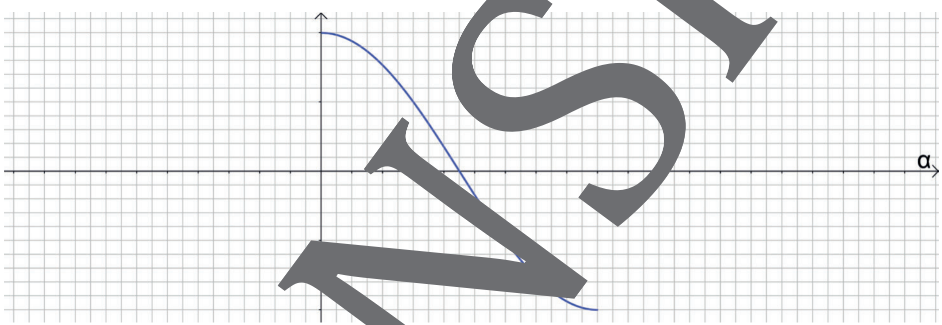
Aufgabe 4

a) **Beschrifte** die Achsen und **vervollständige** den Graphen der Sinusfunktion im Intervall [–90°; 360°].



Grafik: Diana Hauser

b) **Beschrifte** die Achsen und **vervollständige** den Graphen der Kosinusfunktion im Intervall [–180°; 360°].



Grafik: Diana Hauser

Aufgabe 5

Entscheide, ob die Aussagen richtig oder falsch sind.

https://learningapps.org/watch?v=ps1uj1qr522

	richtig	falsch
Die Sinusfunktion nimmt nur Werte zwischen –2 und 1 an.		
Der Graph der Sinusfunktion verläuft linear.		
Die Kosinusfunktion nimmt nur Werte zwischen –1 und 1 an.		
Die Sinusfunktion ist eine nach rechts verschobene Kosinusfunktion.		
Die Sinusfunktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.		
Die Kosinusfunktion hat die Nullstellen $\alpha = 0$ und $\alpha = 180°$.		
Die Sinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.		
Die Kosinusfunktion ist eine nach oben verschobene Sinusfunktion.		
Die Sinusfunktion hat die Nullstellen $\alpha = 0$ und $\alpha = 180°$.		
Die Kosinusfunktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.		
Die Kosinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.		
Der Graph der Sinusfunktion verläuft periodisch mit der Periode 360°.		