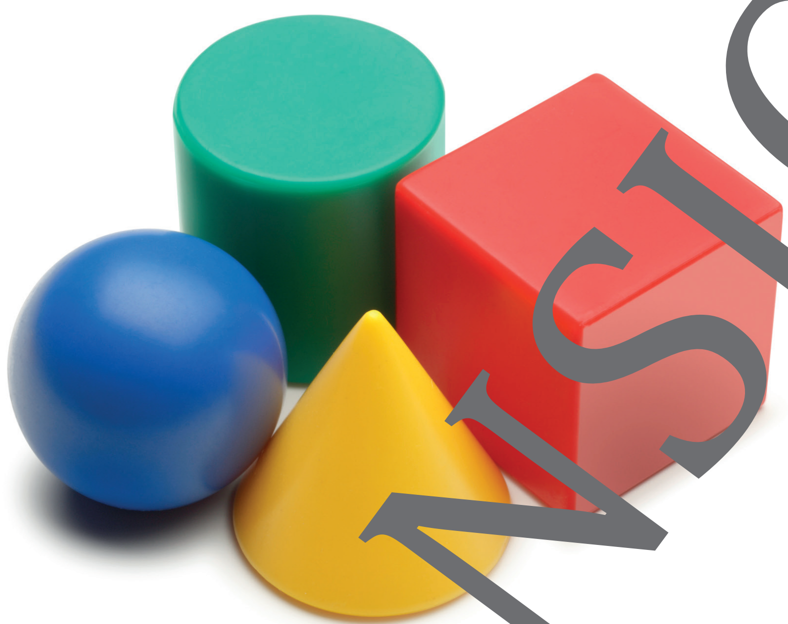
III.46

Form und Raum

Mit algebraischen Mitteln die Geometrie erforschen

Wolfgang Göbels



© DNY59/E+/GettyImages

In diesem Beitrag entdecken Ihre Schülerinnen und Schüler geometrische Beziehungen bei Strecken, ebenen Figuren und Körpern und leiten daraus besondere algebraische Gesetzmäßigkeiten her. In diesem Zusammenhang wird das Textverständnis gefördert und die mathematische Problemlösekompetenz trainiert.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe: 9/10 (G8)
Dauer: 10–13 Unterrichtsstunden
Inhalt: Geometrische Zusammenhänge bei Strecken, ebenen Figuren und Körpern erkennen und daraus besondere algebraische Gesetzmäßigkeiten herleiten
Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mathematisch kommunizieren (K6)
Ihr Plus: Förderung einer kreativen Denkweise durch Verknüpfungen zwischen Algebra und Geometrie

Auf einen Blick

Wh = Wiederholung, Üb = Übung, Lek = Lernerfolgskontrolle

1./2. Stunde

Thema: **Größenvergleich geometrischer Figuren**

M 1 (Wh) Grundwissen wiederholen
M 2 (Üb) Dreiecksberechnung mit Inkreis und Umkreis
M 3 (Üb) Dreieck im Kreisring

3./4. Stunde

Thema: **Von Flächen zu Körpern**

M 4 (Üb) Berechnungen am Kreis [illegible]d Kreisring
M 5 (Üb) Vom Kreisring zum Rec[illegible]eck

5./6. Stunde

Thema: **Von Fläc[illegible]**

M 6 (Üb) Berechnungen [illegible] Kreis und Rechteck
M 7 (Üb) Flächenbetrachtung[illegible] am Kreis

7./8./9. Stunde

Thema: **Von Fla[illegible]en zu Körpern**

M 8 [illegible]b) Berechnun[illegible] des Volumens von verschiedenen Quadern
M 9 [illegible] [illegible]und Volumenvergleiche bei Quadern
M 10 (Üb) Volumenvergleiche bei Halbkugeln und Zylindern

10. Stund[illegible]

Thema: **Satz des Pythagoras weiterdenken**

M [illegible] Variationen zum Satz des Pythagoras

11./12. Stunde

Thema:	**Proportionale Betrachtungen mit und ohne zeichnerische Unterstützung**
M 12 (Üb)	Rechtecke auf Ähnlichkeit untersuchen
M 13 (Üb)	Geometrische Aussagen verstehen und rechnerisch bestätigen

13. Stunde

Thema:	**Lernerfolgskontrolle**
M 14 (Lek)	Lernerfolgskontrolle – Prüfe dein Wissen

Minimalplan

Ihre Zeit ist knapp? Da alle Materialien weitestgehend unabhängig voneinander einsetzbar sind, können Sie bei Zeitknappheit nach Belieben Materialien auswählen. Bevorzugen Sie hier die Materialien, die in besonderer Weise Theorie und Anwendung miteinander verknüpfen, und zwar **M 2** und **M 3**, **M 4** und **M 5**, **M 6** und **M 7** sowie **M 8** und **M 9**. Gegebenenfalls können Sie auf die beiden letzten Materialien am ehesten verzichten.

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

Tauchen diese Symbole auf, sind die Materialien differenziert. Es gibt drei Niveaustufen, wobei nicht jede Niveaustufe extra ausgewiesen wird.		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau

	Dieses Symbol markiert Tipps.

Die Lösungen zu den Materialien finden Sie ab Seite 19.

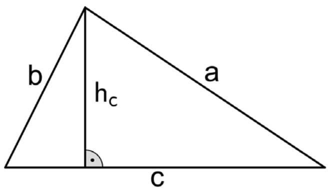
M 1 Grundwissen wiederholen

Diese Formeln brauchst du, um die Aufgaben in den Materialien zu bearbeiten.

Allgemeines Dreieck

Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

Umfang: $U = a + b + c$

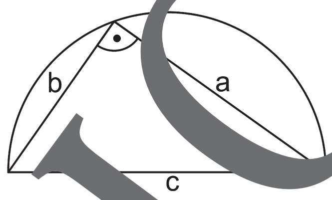


Rechtwinkliges Dreieck

Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Flächeninhalt: $A = \frac{a \cdot b}{2}$

Umfang: $U = a + b + c = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$



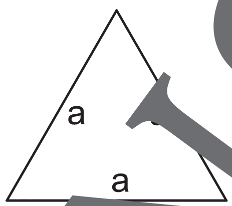
Gleichseitiges Dreieck

Flächeninhalt:

$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$ a

Umfang:

$U = 3 \cdot a$

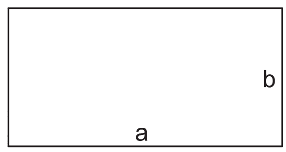


Rechteck

Flächeninhalt: $A = a \cdot b$

Umfang:

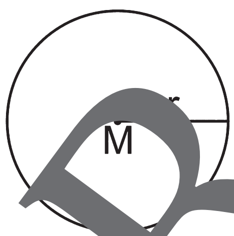
$U = 2 \cdot (a + b)$



Kreis

Flächeninhalt: $A = \pi \cdot r^2$

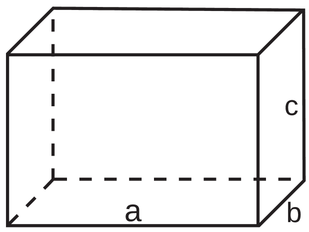
Umfang: $U = 2 \cdot \pi \cdot r$



Quader

Volumen: $V = a \cdot b \cdot c$

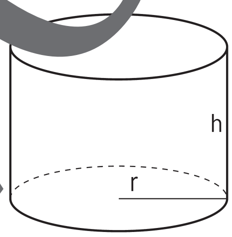
Oberflächeninhalt: $O = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$



Zylinder

Volumen: $V = \pi r^2 h$

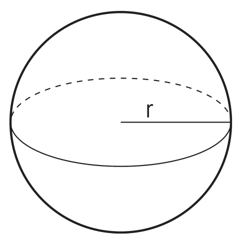
Oberflächeninhalt: $O = 2\pi r(r + h)$



Kugel

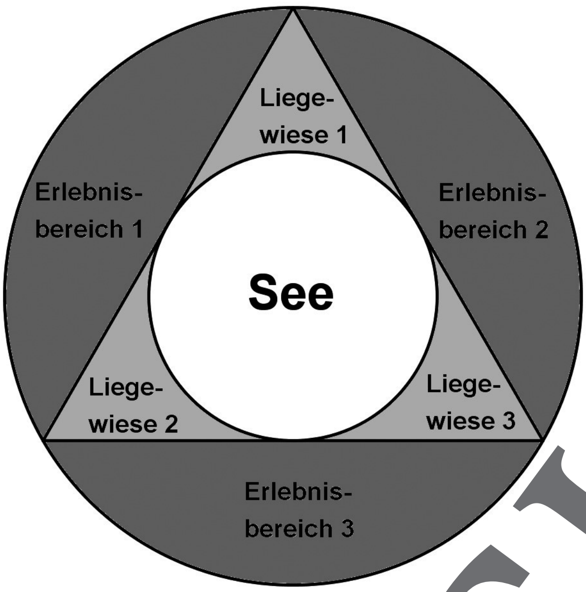
Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Oberflächeninhalt: $O = 4\pi r^2$



Dreiecksberechnung mit Inkreis und Umkreis

M 2



Der Erlebnispark „Utopia“ soll um einige Attraktionen erweitert werden. Um einen kreisrunden See herum ist ein insgesamt 300 m langer Weg geplant, der die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks beschreibt. Die gesamte Erweiterungsfläche ist ebenfalls kreisförmig.
Orientiere dich an der obigen Planskizze. Berate dich bei Bedarf mit deinem Sitznachbarn, deiner Sitznachbarin oder in deiner Gruppe.

Aufgaben

1. Wie viel Quadratmeter Fläche besitzt
   a) der See (Fläche des Inkreises des gleichseitigen Dreiecks),
      Tipp: Da das Dreieck gleichseitig ist, fallen
      – Inkreismittelpunkt,
      – Umkreismittelpunkt,
      – Höhenschnittpunkt und
      – Schwerpunkt
      zusammen.
   b) der gesamte Liegewiesenbereich,
   c) der gesamte Erweiterungsbereich,
   d) der gesamte Erlebnisbereich?

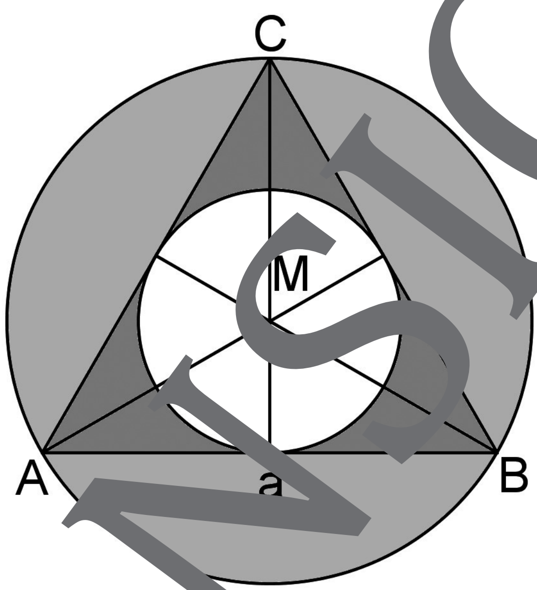
© RiccardoBeretta/iStock/Getty Images

2. Welchen prozentualen Anteil an der gesamten Erweiterungsfläche hat
   a) der See,
   b) der gesamte Liegewiesenbereich,
   c) der gesamte Erlebnisbereich?
      Tipp: Verwende bei der Lösung der Aufgabe 2 die Ergebnisse von Aufgabe 1.

M 3

Dreieck im Kreisring

Verallgemeinere nun das Anwendungsproblem aus Material **M 2**. Das abgebildete Dreieck ABC ist gleichseitig. Bezeichne zusätzlich die Dreiecksseite mit a, die Dreieckshöhe mit h, den Inkreisradius mit r und den Umkreisradius mit R. Alle weiteren Beziehungen zwischen den Linien der Gesamtfigur ergeben sich unmittelbar aus der Abbildung. Vertiefe dich deshalb zunächst einmal konzentriert in den dargestellten Sachverhalt.
Erörtere die Gesamtfigur bei Bedarf mit deinem Sitznachbarn oder deiner Sitznachbarin, indem du die Formeln für den **Flächeninhalt** des Umkreises, des Inkreises, des Kreisrings (Fläche zwischen Umkreis und Inkreis), des Dreiecks ABC und der hellgrauen und dunkelgrauen Flächen aufstellt.



Aufgaben

Beweise die folgenden Aussagen:

1. Die Umkreisfläche ist genau vier mal so groß wie die Inkreisfläche.
2. Die Dreiecksfläche ist $\frac{3\sqrt{3}}{\pi} \approx 1{,}65$ mal so groß wie die Inkreisfläche.
3. Die Umkreisfläche ist $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \approx 2{,}42$ mal so groß wie die Dreiecksfläche.
4. Die hellgrau gefärbte Fläche ist $\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - \pi} \approx 3{,}59$ mal so groß wie die dunkelgrau gefärbte Fläche.

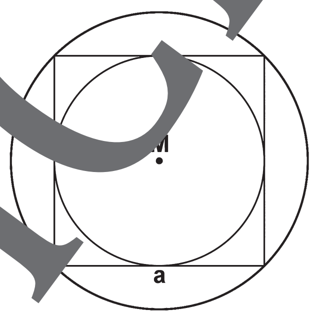
Tipps:

– M teilt die Dreieckshöhe h (von C aus) im Verhältnis 2 : 1.
– Zeige mit Hilfe des Satzes von Pythagoras:
$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$
Beachte bei der Lösung der vier Aufgabenteile außer diesen Beziehungen auch insbesondere die bekannten Formeln für die Flächeninhalte des Dreiecks und des Kreises.

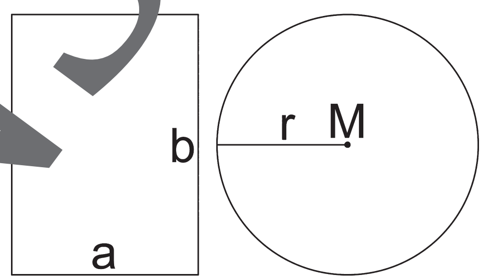
M 14 Lernerfolgskontrolle – Prüfe dein Wissen

Aufgaben

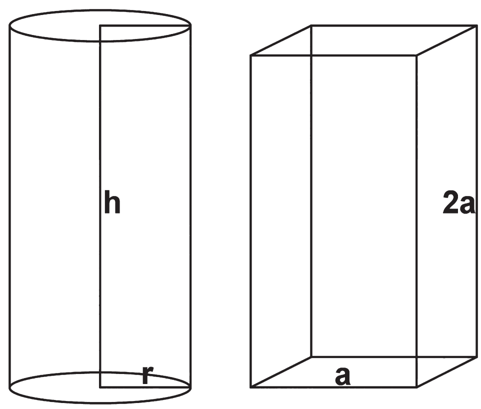
1. Konstruiere den Inkreis, den Umkreis, den Höhenschnittpunkt und den Schwerpunkt eines Dreiecks mit a = 8 cm, b = 7 cm und c = 9 cm.
2. Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen a = 6 cm und b = 10 cm und ein dazu ähnliches Rechteck mit der Länge a′ = 3 cm der kürzeren Seite.
   Berechne die fehlende Länge b′.
3. Berechne in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Seitenlängen a = 15 cm und b = 10 cm die Weite der Winkel α und β, und zwar sowohl mit Tangens als auch mit Kotangens, sowie die Seitenlänge c.
4. Gegeben sei ein Quadrat mit Inkreis und Umkreis. Seine Seitenlänge sei a.



   a) Berechne die Flächeninhalte und Umfänge aller drei Figuren in Abhängigkeit von a.
   b) Zeige für die Flächeninhalte $A_{Inkreis}$, $A_{Quadrat}$ und $A_{Umkreis}$:
   $A_{Inkreis} : A_{Quadrat} : A_{Umkreis} = \pi : 4 : 2\pi$
   c) Zeige für die Umfänge $U_{Inkreis}$, $U_{Quadrat}$ und $U_{Umkreis}$:
   $U_{Inkreis} : U_{Quadrat} : U_{Umkreis} = \pi : 4 : \sqrt{2}\pi$
5. Gegeben sei ein Rechteck R mit den Seitenlängen a und b sowie ein Kreis K.

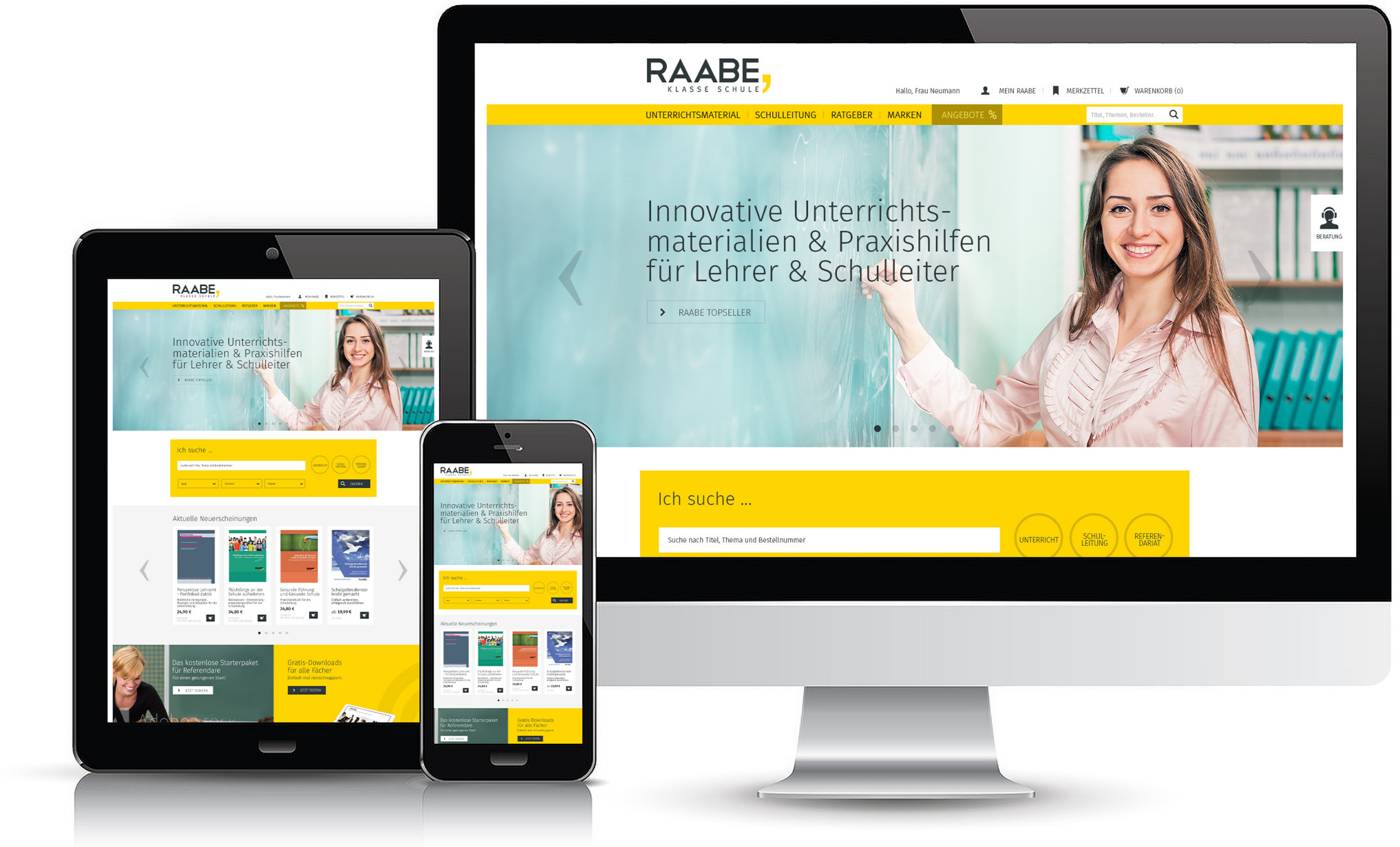


   a) Berechne den Flächeninhalt und den Umfang von R in Abhängigkeit von a und b.
   Bestimme in Abhängigkeit von a und b den Radius r von K so, dass K
   b) flächengleich,
   c) umfangsgleich
   zu R ist.
6. Gegeben sei ein Zylinder Z mit dem Grundkreis-radius r und Höhe h sowie eine quadratische Säule S mit der Grundseitenlänge a und der Höhe 2a.



   a) Berechne jeweils das Volumen und den Oberflächeninhalt von Z in Abhängigkeit von r und h.
   Bestimme in Abhängigkeit von r und h die Grundseitenlänge a von S so, dass Z
   b) volumengleich,
   c) oberflächengleich
   zu S ist.

Der RAABE Webshop:
Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de