

Wie viele Bälle passen in unsere Turnhalle? – Aufgaben im Stil Enrico Fermis bearbeiten

Von Dr. Doris Bocka, Bindlach



Titelbild: Thinkstock/iStock

Wie viele Bälle passen in eine Turnhalle oder auf ein Fußballfeld?
Ihre Schüler lernen mit solchen Fragen umzugehen und sinnvolle
Lösungen zu erarbeiten.

Klasse	5/6
Dauer	2-3 Unterrichtsstunden
Inhalt	Offene Aufgabenstellungen nach Art von Fermi-Aufgaben mit vielfältigen mathematischen Strategien lösen, Flächen und Volumen berechnen, Anzahlen bestimmen
Kompetenzen	Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematisch argumentieren (K1) und kommunizieren (K6)
Ihr Plus	Handlungsorientierung und Bearbeitungsstrategien

Didaktisch-methodische Hinweise

Fachlicher Hintergrund: Fermi-Aufgaben

Bei Fermi-Aufgaben handelt es sich um spezielle Problemstellungen, die auf den italienischen Physiker und Nobelpreisträger Enrico Fermi (1901–1954) zurückgehen. 1938 erhielt er den Nobelpreis für Physik. Nach mehreren Stationen in Europa arbeitete er an verschiedenen Universitäten in den USA, unter anderem in Chicago.

Fermi war bekannt dafür, dass er seinen Studierenden Aufgaben stellte, die **auf den ersten Blick unlösbar** erschienen, weil sie praktisch keine Daten enthielten. Er wollte, dass sie mit Allgemeinwissen und „gesundem Menschenverstand“ gelöst werden. Dabei wird eine Fragestellung in Teilproblemen bearbeitet, für die Erfahrungswerte vorhanden sind, und durch Abschätzen gelöst.

Begründung für die Behandlung von Fermi-Aufgaben im Unterricht

Bei diesem Aufgabentypus können Probleme aus dem Erfahrungsfeld der Schülerinnen und Schüler aufgegriffen werden. Dabei wirft man eine (scheinbar) einfache Problemstellung auf und hält sie offen. Das Fehlen von Zahlenangaben verhindert eine vorschnelle Verknüpfung mit bekannten Rechenoperationen.

Die **Lebenswirklichkeit** der Schülerinnen und Schüler wird in ihrer Komplexität **konkret dargestellt**, was sich häufig erst bei der Bearbeitung von den Teilaufgaben herauskristallisiert, denn grobes Schätzen genügt oft nicht. Das zeigt sich unter anderem darin, dass die **vermuteten Werte** der Schülerinnen und Schüler **stark variieren** können. Der Nonsens-Ergebnisse herauskommen: Auf die Frage „Wie viele Fußbälle passen auf ein Fußballfeld?“ (M 1) schätzten Schülerinnen und Schüler einer Klasse zwischen 1 000 und 1 000 000 Bälle – daraus lässt sich schließen, dass sie nur vage Größenvorstellungen haben. Vielmehr soll durch **strategisches Vorgehen** (M 2) ein **passendes mathematisches Modell** für den Lösungsweg gefunden werden.

Da das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung von Fermi-Aufgaben eine entscheidende Rolle spielt, gibt es **kein Standardverfahren** zur Lösung. Deswegen sind nicht nur mehrere Lösungswege möglich, sondern auch mehrere (sinnvolle) Lösungen.

Vielfältige Forderung mathematischer Kompetenzen

Durch Aufgaben im Stil Enrico Fermis werden auf vielfältige Art und Weise mathematische Kompetenzen gefördert. Als Ausgangspunkt dienen komplexe Sachsituationen, für die ein geeignetes mathematisches **Modell** gefunden werden muss, das die **Sachebene mit der mathematischen Ebene verbindet**. Mit dem gewählten Modell wird operiert, bis es eine mathematische Lösung gibt. Diese wird dann auf die Sachsituation hin interpretiert.

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten schwierig erscheinende Sachsituationen problemlösend. Sie **vertiefen dabei ihr Verständnis für Größen**, wobei ihre Alltagsvorstellungen an mathematischen Größenbereichen überprüft werden. Bei der Bearbeitung von (selbst gewählten) Teilaufgaben rechnen die Schülerinnen und Schüler überschlägig und exakt mit Zahlen und Maßeinheiten.

Am Ende des Lösungsprozesses reflektieren und bewerten sie ihre Lösungswege. Da die Ergebnisse aufgrund von sinnvollen Annahmen und Abschätzungen im Lösungsprozess eine gewisse Spannweite aufweisen können, erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass es keine alleingültige Lösung gibt. Insgesamt lernen die Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung von Aufgaben im Fermi-Stil, **mit vagen Angaben, Schätzungen und Teilproblemen umzugehen**.

Auf einen Blick

Stunde 1-3 Fermi-Aufgaben und Hilfestellungen

M 1 (Fo)	Wie viele Bälle passen auf ein Fußballfeld?
M 2 (Fv)	Bearbeitungsstrategien
M 3 (Ab)	Fermi-Fragen rund ums Fußballfeld
M 4 (Ib)	Infoblatt mit Größenangaben
M 5 (Ib)	Infoblatt: Bälle anordnen
M 6 (Ab)	Wie viele Fußbälle passen in unsere Turnhalle?
M 7 (Ab)	Was wächst denn da?
M 8 (Ab)	Wie viel passt hinein?
M 9 (Ib)	Infoblatt: Enrico Fermi
M 10 (Ab)	Meine eigene Fermi-Aufgabe

Legende der Abkürzungen

Ab: Arbeitsblatt; **Fo:** Farbfolie; **Fv:** Folienvorlage; **Ib:** Infoblatt; **Tx:** Text

Minimalplan

In einer Doppelstunde lassen sich mehrere Fermi-Aufgaben arbeitsteilig lösen (M 1, M 3, M 6, M 7 oder M 8). Man kann dazu nur die Arbeitsblätter (besonders bei M 1 und M 3 in Kombination mit M 4 und M 5) verwenden.

Zum Einstieg ist es jedoch sinnvoll, zumindest ein Teilproblem handlungsorientiert zu lösen (z. B. bei M 1 einen Quadratmeter mit Fußbällen auslegen, bei M 3 auf dem Schulgelände die Größe eines Parkplatzes ausmessen) und die Bearbeitungsstrategien (M 2) zu erarbeiten. In einer Einzelstunde können auch M 5 und/oder M 6 arbeitsteilig gelöst werden, eventuell kann auch nur M 9 bearbeitet werden.

Die Lösungen zu den Materialien finden Sie ab Seite 18.

Wie viele Bälle passen auf ein Fußballfeld?

M 1



Aufgabe 1: Welche der oben genannten Überlegungen sind sinnvoll? Diskutiert in der Klasse.

Aufgabe 2: Überlege dir, welche Teilfragen du stellen kannst.

Wie groß ist _____ ?

Wie viele _____ ?

Wie groß ist _____ ?

Aufgabe 3: Welche Zahlenangaben brauchst du, um die Aufgabe zu lösen?

Ich weiß, dass _____.

Ich erforsche, wie _____.

Aufgabe 4: Wie möchtest du vorgehen?

Zuerst _____.

Dann _____.

Zum Schluss _____.

M 2

Bearbeitungsstrategien

Hier bekommst du Tipps, wie du mit offenen Aufgabenstellungen und Fermi-Aufgaben umgehst. Du kannst zur Bearbeitung folgende Fragen hinzuziehen:

Frage 1: Was weißt du schon darüber?

Überlege dir, welche Vorkenntnisse du schon über die Problemstellung hast und notiere diese. Vielleicht musst du auch alles nachforschen.

Frage 2: Welche Informationen brauchst du noch?

Um die Aufgabe zu lösen, brauchst du noch konkrete Angaben. Überlege dir, woher du diese bekommen kannst. Oft hilft eine Recherche im Internet.

Frage 3: Welche Teilprobleme musst du lösen?

Zerlege die Aufgabenstellung in Teilprobleme. Dabei kannst du das „große“ Problem in „kleine“ Probleme gliedern. Zu Beginn kannst du schon einmal Teilfragen abschätzen, eine Skizze anfertigen oder (bekannte) Bezugsgrößen (zum Messen oder Zählen) verwenden – zum Beispiel die Anzahl pro Quadratmeter, die Menge pro Kubikmeter usw.

Frage 4: Wie kannst du deinen Lösungsweg am besten organisieren?

Überlege, was du handelnd, zählend oder rechnerisch lösen kannst. Notiere dir auch die Teilergebnisse, die du zu deinen Teilproblemen gefunden hast.

Frage 5: Kann das Ergebnis stimmen?

Kontrolliere, ob du dein Ergebnis mit deinem Vorwissen vereinbaren kannst und ob deine Abschätzungen stimmen können. Gerade bei Fermi-Aufgaben gibt es nicht nur ein richtiges Ergebnis. Je nachdem, welche Teilprobleme und eingeholten Informationen du zugrunde gelegt hast können abweichende Ergebnisse zustande kommen – sie müssen aber plausibel sein. Überprüfe, ob die Größenordnung stimmen kann.

Du kannst dir auch überlegen, wie sich dein Ergebnis ändert, wenn du bei einem Teilproblem einen anderen Zahlenwert zugrunde legst, du eine andere Vorgehensweise wählst oder sich eine Variable ändert.

Fermi-Fragen rund ums Fußballfeld

M 3

Bearbeitet die Aufgaben in der Gruppe. Überlegt gemeinsam, wie ihr am besten vorgeht. Beachtet dabei sinnvolle Bezugsgrößen. Nehmt die Bearbeitungsstrategien zu Hilfe.

Aufgabe 1: Wie viele Mannschaften passen auf ein Fußballfeld?

Tipp Probiert aus, wie viele Kinder auf einem Quadratmeter Platz haben.

Notiert die Teilprobleme mit ihren Lösungen:



Notiert das Ergebnis:

Aufgabe 2: Wie viele Autos können auf einem Fußballfeld parken?

Tipp Denkt daran, dass nur ganze Autos geparkt werden dürfen.

Notiert die Teilprobleme mit ihren Lösungen:



Notiert das Ergebnis:

Aufgabe 3: Wie viele Grashalme wachsen auf einem Fußballfeld?

Tipp Als Bezugsgröße könnt ihr die Anzahl der Grashalme auf 10 cm^2 nehmen. Dann könnt ihr in Quadratmeter umrechnen.

Notiert die Teilprobleme mit ihren Lösungen:



Bilder: Thinkstock/iStock

Notiert das Ergebnis:

Hinweise (M 1)

Der Schwerpunkt liegt hier auf den Erwerb von Strategien. Dazu wird dieses Arbeitsblatt mit Hilfe von M 2 ausgefüllt oder Sie erarbeiten die Strategien mit Ihrer Klasse. Zur Berechnung der Problemfrage „Wie viele Bälle passen auf ein Fußballfeld?“ können Sie das Infoblatt mit Größenangaben M 4 einsetzen. Diese Aufgabe lässt sich aber auch handlungsorientiert lösen. Dazu bringen Sie oder Ihre Schülerinnen und Schüler mehrere Fußbälle (auch in verschiedenen Größen) sowie Maßbänder mit. Die Lernenden bestimmen dann den (durchschnittlichen) Durchmesser eines Fußballs und können darüber hinaus den Sportplatz oder ein benachbartes Fußballfeld mit einem Maßband vermessen. Sie können die abgedeckte Folie zu Beginn des Unterrichts auf einen Overheadprojektor legen und dann schrittweise aufdecken (zuerst die Frage, dann lassen Sie die Lernenden eigene Vermutungen anstellen, weitere Aufgaben werden gemeinsam Schritt für Schritt erarbeitet). In den Lösungen finden Sie auch Beispielantworten.

Hinweise (M 2)

Das Infoblatt mit den Bearbeitungsstrategien können Sie entweder im Klassensatz kopieren und als Checkliste austeilen oder während der Bearbeitung mithilfe des Overheadprojektors für alle sichtbar an die Leinwand projizieren. Dieser Leitfaden lässt sich je nach Vorkenntnissen und zur Verfügung stehender Zeit auch selbst erarbeiten.

Hinweise (M 3)

Dieses Arbeitsblatt wird am besten in arbeitsteiligen Gruppen handlungsorientiert bearbeitet. Bei Aufgabe 1 kann man im Klassenraum mit Klebeband einen Quadratmeter abkleben und mehrmals Gruppen von Schülerinnen und Schülern daraufstellen. Dabei lässt sich angeregt darüber diskutieren, wie eng die Personen stehen sollen, ob Erwachsene mehr Platz brauchen oder ein Durchschnittswert Sinn macht, etc. Die Größe eines Fußballfeldes recherchieren die Lernenden selbst oder entnehmen Sie aus dem Infoblatt mit Größenangaben M 4.

Bei Aufgabe 2 muss entschieden werden, wie dicht und auf welche Weise die Pkw parken sollten. Sollen sie wie auf einem Parkplatz stehen – mit Platz zur Seite, nach vorne und hinten zum Rangieren? Oder soll man nur nacheinander parken wie in einer Parkreihe mit Platz zum Ein- und Aussteigen? Oder sollen sie möglichst dicht und platzsparend abgestellt sein? Was ist eine sinnvolle Bezugsgröße – die Größe eines (durchschnittlichen) Pkw oder eines (Standard-) Parkplatzes? Beispielwerte dazu finden Sie in den Lösungen. Die Lernenden können auch selbst auf dem (sicheren) Lehrerparkplatz Autos oder Stellflächen vorsichtig vermessen. Bei Aufgabe 3 kann man die Anzahl der Grashalme pro 10 cm^2 recherchieren oder an einem ausgestochenen Rasenstück selbst zählen. Ein vorsichtig ausgestochenes Rasenstück lässt sich auch gut wieder an seine ursprüngliche Stelle einsetzen. Anhand dieser Bezugsgröße lässt sich die Anzahl der Grashalme pro Quadratmeter errechnen.

Hinweise (M 4)

Das Infoblatt enthält Angaben, die für die Bearbeitung der Arbeitsblätter M 1, M 3 und M 6 hilfreich sind. Die Werte lassen sich aber auch handlungsorientiert in der Klasse bestimmen. Dazu sind verschiedene Bälle und Maßbänder (aus Papier oder Kunststoff gibt es sie oft gratis in Möbelhäusern) nötig. Für die Vermessung von, Spielfeldern, Turnhallenflächen etc. sind lange Maßbänder, wie sie in der Leichtathletik verwendet werden, sinnvoll.

Lösungen

Hinweise zu den Lösungen

Verbindliche Lösungen mit exakten Zahlenwerten gibt es bei Fermi-Aufgaben nicht. Da die zugrunde gelegten Zahlenangaben variieren können (je nach gestellten Teilproblemen, nach gewählter Bezugsgröße oder nach Schätzung), sind in den Lösungen lediglich Beispielrechnungen angegeben. Ziel der Aufgabenstellungen ist es vielmehr, Vorstellungen von Größenordnungen zu gewinnen. Dazu dienen vernünftige und begründbare Annahmen.

Lösung (M 1) Wie viele Bälle passen auf ein Fußballfeld?

Aufgabe 1: Welche Überlegungen der Kinder sind sinnvoll? Diskutiert in der Klasse.

Individuelle Lösungen

Aufgabe 2: Überlege dir, welche Teilfragen du stellen kannst.

Beispiellösung:

Wie groß ist ein Fußball?

Wie viele Fußbälle passen auf einen Quadratmeter?

Wie groß ist ein Fußballfeld?

Aufgabe 3: Welche Zahlenangaben brauchst du, um die Aufgabe zu lösen?

Beispiellösung:

Ich weiß, dass individuelle Lösungen

Ich erforsche, wie groß ein Fußball ist, wie groß ein Fußballfeld ist, wie viele Fußbälle auf einen Quadratmeter passen.

Aufgabe 4: Wie möchtest du vorgehen?

Beispiellösung:

Zuerst messe oder recherchiere ich, wie groß ein Fußball und ein Fußballfeld sind.

Dann lege oder berechne ich, wie viele Bälle auf einen Quadratmeter passen.

Zum Schluss berechne ich wie viele Fußbälle auf ein Fußballfeld passen.

Beispiellösung: $7140 \cdot 25 = 178\,500$ Fußbälle passen auf ein Fußballfeld.