Wurfbewegungen – Theorie, Übungsaufgaben und Test

Carlo Vöst, Oliva, Spanien
Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing

Wurfbewegungen sind innerhalb der Mechanik sehr interessant und in ihrer Untersuchung anspruchsvoll, weil sie eine Kombination verschiedener Bewegungsarten darstellen. Dementsprechend verlangen sie an der einen oder anderen Stelle zu ihrer Beschreibung einen erhöhten mathematischen Aufwand, der sich allerdings durch vereinfachende Annahmen auch reduzieren lässt.

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Physik

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett-Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Anna-Greta Wittnebel
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: © Oliver Rossi/Stone/Getty Images Plus
Illustrationen: Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing
Korrektorat: Johanna Stotz, Wyhl a. K., Dr. Stefan Völker, Jena

Wurfbewegungen – Theorie, Übungsaufgaben und Test

Oberstufe (Niveau)

Carlo Vöst, Oliva, Spanien
Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing

M 1 Theorie: Der waagerechte Wurf	**1**
M 2 Theorie: Der schiefe Wurf	**3**
M 3 Aufgaben zum waagerechten Wurf	**5**
M 4 Aufgaben zum waagerechten Wurf	**6**
M 5 Aufgaben zum schiefen Wurf	**7**
M 6 Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen!	**9**
M 7 Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen!	**10**
Hinweise und Lösungen	**11**

Die Schüler lernen

Der Beitrag ist für Schüler zum Selbststudium gedacht oder auch als Hilfe zur Vorbereitung auf eine Klassenarbeit. Am Anfang steht der „waagerechte Wurf", der noch relativ einfach zu erfassen ist, während anschließend auch der sogenannte „schiefe Wurf" behandelt wird. Nach dem Theorieteil findet sich eine Fülle von Aufgaben zum Einüben des besprochenen Stoffs. Am Ende des Beitrags steht eine Klassenarbeit, welche dem Testen des Erlernten dient.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Theorie: Der waagerechte Wurf	M 1	Ab, Einzelarbeit
Theorie: Der schiefe Wurf	M 2	Ab, Einzelarbeit
Aufgaben zum waagerechten Wurf	M 3	Ab, Einzelarbeit
Aufgaben zum waagerechten Wurf	M 4	Ab, Einzelarbeit
Aufgaben zum schiefen Wurf	M 5	Ab, Einzelarbeit
Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen!	M 6	LEK
Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen!	M 7	LEK

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann beschränken Sie sich auf die Behandlung des waagerechten Wurfs (**M 1, M 3** und **M 4**).

Erklärung der Differenzierungssymbole

	Aufgaben, in denen generell Differenzierung möglich ist (Lehrer-symbol)		Die mittleren Aufgaben-varianten
	Die anspruchsvollsten Aufgaben-varianten		Die leichtesten Aufgabenvarianten

M1 Theorie: Der waagerechte Wurf

Wir betrachten eine (kleine) Kugel, die in einer Höhe h über dem Erdboden waagerecht mit der (Horizontal-)Geschwindigkeit $\vec{v}_0$ abgeworfen wird. Diese Geschwindigkeit $\vec{v}_0$ behält die Kugel aufgrund des Trägheitssatzes von Newton (= 1. Newton'sches Axiom) während ihres ganzen Fluges bei, weil in x-Richtung keine Kraft wirkt.

Hinweis: Wir vernachlässigen hierbei Reibungskräfte (Luft).

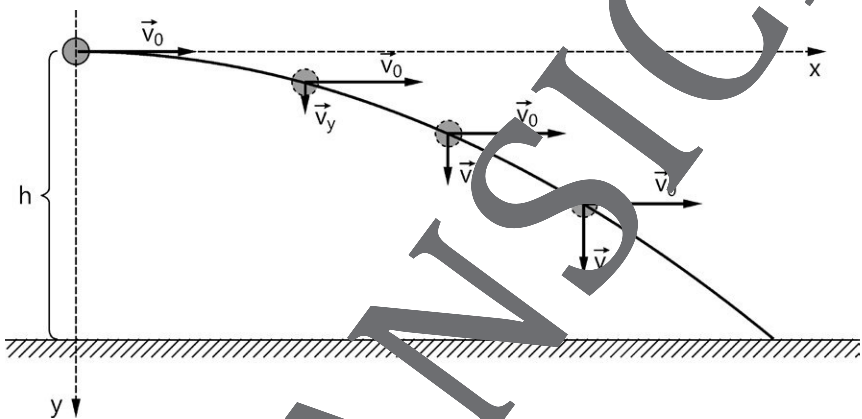

Abb. 1, Grafik: Dr. Wolfgang Zettlmeier

Auf die Kugel wirkt in senkrechter Richtung die Erdanziehungskraft (auch während ihres ganzen Fluges). Sobald die Kugel die Hand verlässt, wird sie in y-Richtung nach dem 2. Newton'schen Gesetz ständig beschleunigt. Dies führt zu einer (immer weiter zunehmenden) Geschwindigkeit $\vec{v}_y$ in y-Richtung (während die Geschwindigkeit in x-Richtung ja konstant bleibt).

Pro Zeiteinheit t ist also der zurückgelegte Weg in x-Richtung konstant gleich: $x = v_0 \cdot t$, während der zurückgelegte Weg in y-Richtung quadratisch zunimmt: $y = \frac{1}{2} g \cdot t^2$.

Diese beiden Bewegungen (aus denen sich die Gesamtbewegung zusammensetzt) beeinflussen sich gegenseitig nicht.

Koordinatenmäßige Erfassung:

$$\left.\begin{array}{l} x = v_0 t \quad \Leftrightarrow \quad t = \dfrac{x}{v_0} \\ y = \dfrac{1}{2} g t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2} = \underbrace{\frac{g}{2v_0^2}}_{\text{const.}} \cdot x^2$$

An der quadratischen Abhängigkeit von y von x erkennt man, dass die Kurve eine Parabelbahn ist.

$v_y = g \cdot t = g \cdot \dfrac{x}{v_0} = \underbrace{\dfrac{g}{v_0}}_{\text{const.}} \cdot x$, also ist die Geschwindigkeit in y-Richtung proportional zur horizontalen Entfernung vom Abschusspunkt.

<u>Wurfweite:</u> aus $y = \dfrac{g}{2{v_0}^2} x^2$ folgt mit $y_0 = h$: $x_W = v_0 \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ (Wurfweite).

<u>Wurfdauer:</u> $h = \dfrac{1}{2} g t^2 \;\Leftrightarrow\; t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

<u>Auftreffgeschwindigkeit und Auftreffwinkel:</u>

$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$

$\tan \varphi = \dfrac{|v_y|}{v_0} = \dfrac{g\,t}{v_0}$

da $v_x = \text{const}$

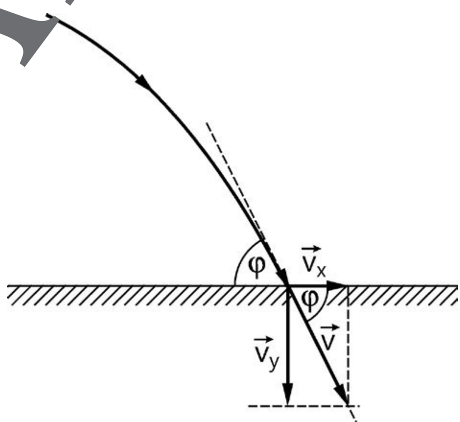

Abb. 2, Grafik: Dr. Wolfgang Zettlmeier

M 2 Theorie: Der schiefe Wurf

Die meisten und auch interessantesten Wurfbewegungen (Flug eines Golfballs, Kugelstoß, Speerwurf, Weitsprung etc.) stellen keinen waagerechten (horizontalen) Wurf dar. Wir betrachten als Beispiel den Wurf eines Balls.

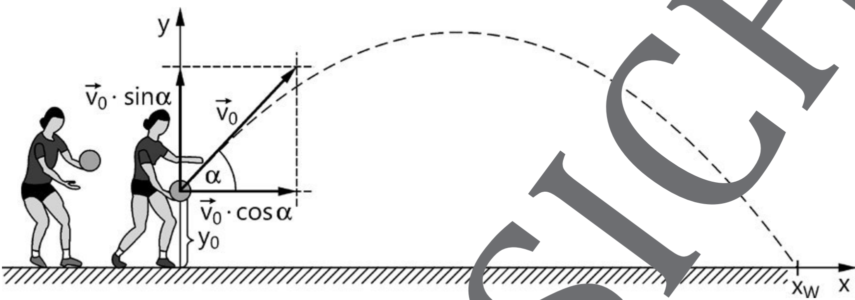

Abb. 3, Grafik: Dr. Wolfgang Zettlmeier

Bewegungsgleichungen des schiefen Wurfs

In x-Richtung wirken keine Kräfte, also gilt:

$v_x(t) = v_0 \cdot \cos\alpha$.

Damit ist $x(t) = v_x(t) \cdot t = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$.

In y-Richtung wirkt die Gewichtskraft des Balls, also wird er mit $|\vec{g}|$ in Richtung Erdoberfläche beschleunigt und es gilt:

$v_y(t) = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t$ und damit $y(t) = y_0 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$.

Aufstellen der Bewegungsgleichung:

$x(t) = v_x(t) \cdot t = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \Rightarrow t = \frac{x(t)}{v_0 \cdot \cos\alpha}$ eingesetzt:

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{x(t)}{v_0 \cdot \cos\alpha} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x(t)}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2 \text{, also:}$$

$$y(t) = y_0 + \tan\alpha \cdot x(t) - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2(t) .$$

Für den Fall, dass der Ball auf Bodenhöhe abgeworfen wird ($y_0 = 0$), gilt für die Wurfweite x_W:

$$0 = \tan\alpha \cdot x_W - \frac{g}{2\,v_0^{\,2}\cos^2\alpha} \cdot x_W^{\,2} = x_W\left(\tan\alpha - \frac{g}{2\,v_0^{\,2}\cos^2\alpha} \cdot x_W\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_W = 0 \;\vee\; x_W = \frac{\tan\alpha \cdot 2v_0^{\,2} \cdot \cos^2\alpha}{g} = \frac{2v_0^{\,2}}{g} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{v_0^{\,2}}{g} \cdot \sin(2\alpha).$$

Also ist die Wurfweite proportional zum Quadrat der Abwurfgeschwindigkeit und maximal $\left(\frac{v_0^{\,2}}{g}\right)$ für $\alpha = 45°$.

M 3 Aufgaben zum waagerechten Wurf

1. Ein Projektil wird mit einer Geschwindigkeit von $90{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ in horizontaler Richtung 280 m über dem Erdboden abgeschossen.

   Hinweis: Rechnen Sie mit $g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

   a) Berechnen Sie, nach welcher Zeit und in welcher waagerecht gerechneten Entfernung es am Erdboden ankommt.
   b) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit (Betrag und Richtung gegenüber der Waagerechten), die es im Augenblick des Aufschlags hat.
   c) Bestimmen Sie, wie weit das Projektil nach 5,00 s in x- bzw. y-Richtung geflogen ist. Bestimmen Sie auch seine Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt.

2. Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der ein Stein von einer 125 m hohen senkrechten Felswand waagerecht geschleudert werden muss, damit er in einer Entfernung von 80,0 m vom Fußpunkt der Felswand die Oberfläche eines Bergsees trifft. Bestimmen Sie auch seinen Geschwindigkeitsbetrag beim Auftreffen.

3. Ein Kind rutscht im Schwimmbad eine Rampe hinunter. Es verlässt sie horizontal und trifft 2,5 m tiefer in 3,0 m horizontaler Entfernung auf das Wasser. Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der es die Rutsche verlässt.

4. Aus einem Gartenschlauch tritt das Wasser mit einer Geschwindigkeit von $6{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ aus.

   a) Berechnen Sie, wie hoch der Gärtner den Schlauch mindestens waagerecht halten muss, wenn er ein 4,0 m entferntes Beet mit dem Wasserstrahl treffen will.
   b) Bestimmen Sie, mit welcher Geschwindigkeit und unter welchem Winkel das Wasser für diese Höhe auf das Beet trifft.

5. Ein Tennisspieler schlägt den Ball von der Grundlinie des Feldes aus einer Höhe von 2,40 m in horizontaler Richtung (keine Luftreibung; kein Spin).
   a) Berechnen Sie, wie lange der Ball braucht, bis er beim Gegner auf den Boden auftrifft.
   b) Bestimmen Sie die Anfangsgeschwindigkeit v_0 in x-Richtung, die dem Ball gegeben werden muss, damit er beim Gegner auf der Grundlinie aufkommt (gesamte Spielfeldlänge 23,77 m).
   Welche Geschwindigkeit in km/h hat er dann?

M 4 Aufgaben zum waagerechten Wurf

1. Ein Skispringer der Masse m = 75 kg springt von einer Schanze. Der Start liegt Δh = 90 m über dem Schanzentisch, die Länge der Anlaufspur ist l = 140 m, der Absprung erfolge horizontal.

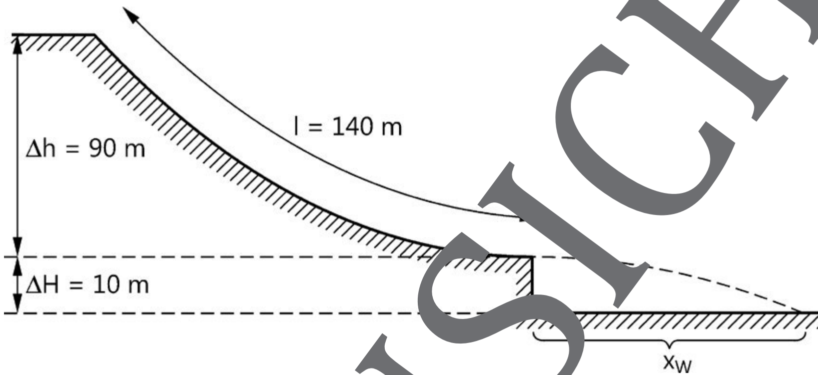

Abb. 4, Grafik: Dr. Wolfgang Zettlmeier

a) Die Reibung bleibe zunächst außer Acht: Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_0 des Springers beim Verlassen des Schanzentisches.
Hinweis: Verwenden Sie den Energieerhaltungssatz (EES).

b) Die Luftreibung sowie die Reibung zwischen Ski und Schnee sollen nun durch die konstante Reibungskraft F_r = 300 N berücksichtigt werden. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_1, mit der der Springer die Schanze verlassen muss.
Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m v^2 + F_r \cdot \ell$

c) Berechnen Sie die Sprungweite, welche der Springer mit der Geschwindigkeit v_1 erreicht. Die Reibung in der Flugphase wird nicht berücksichtigt.

2. Ein Stein wird in 2,10 m Höhe mit einer Geschwindigkeit von $18{,}0\ \frac{m}{s}$ waagerecht abgeworfen.

a) Beschreiben Sie die Bewegung des Steins in x-Richtung und in y-Richtung (z. B. beschleunigt oder gleichförmig), wenn man von Reibung absieht.

b) Berechnen Sie, wie lange der Stein unterwegs ist.

c) Berechnen Sie die Flugweite des Steins.

M 5 Aufgaben zum schiefen Wurf

1. (Fortsetzung Nr. 2, M 4)
   Ein Stein wird aus 2,10 m Höhe mit einer Geschwindigkeit von $18{,}0\ \frac{m}{s}$ und unter einem Winkel von 18° gegenüber der Waagerechten abgeworfen.
   a) Beschreiben Sie die Bewegung des Steins in x-Richtung und in y-Richtung (z. B. beschleunigt oder gleichförmig), wenn man von Reibung absieht.
   b) Berechnen Sie, wie lange der Stein unterwegs ist.
   c) Berechnen Sie die Flugweite des Steins.
   d) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Stein den höchsten Punkt seiner Flugbahn erreicht. Ermitteln Sie auch die Flughöhe zu diesem Zeitpunkt.
   e) Bestimmen Sie seinen Ort 1,00 s nach dem Abwurf.
   f) Berechnen Sie die Entfernung des Steins beim Aufprall vom Abwurfpunkt.
   g) Wie groß ist im Moment des Aufpralls am Boden seine Geschwindigkeit?

2. Ein Fußball wird bei einem Freistoß vom Punkt A aus mit der Geschwindigkeit $v_0 = 20{,}0\ \frac{m}{s}$ unter dem Winkel $\alpha = 30°$ getreten. Der Ball sei punktförmig.
   Reibungseffekte sollen vernachlässigt werden.
   Der Freistoßschütze steht 30,0 m vom Tor entfernt. Die Abwehrmauer ist (entsprechend der internationalen Regeln) 9,15 m vom Schützen entfernt und 1,90 m hoch. Die Unterkante der Querlatte eines Fußballtores ist 2,44 m über dem Erdboden. Freistoßschütze, die Mitte der Abwehrmauer und die Mitte des Tores liegen auf einer Geraden und der Ball fliegt in Richtung Tormitte.

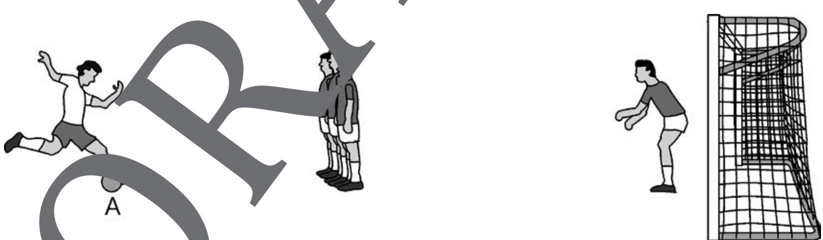

Abb. 5; Grafik: Dr. Wolfgang Zettlmeier

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Ball (weit) über die Abwehrmauer fliegt, aber auch (knapp) über das Tor geht.
b) Berechnen Sie, wie weit vor dem Tor der Ball seine höchste Flughöhe erreicht hat. Geben Sie auch diese höchste Flughöhe an.
c) Ändern Sie den Abschusswinkel α so, dass der Ball zwar über die Abwehrmauer geht, aber nicht über das Tor.

3. Ein Golfball der Masse 45,0 g wird unter einem Abschlagwinkel von 40° etwa 180 m weit geschlagen.
   a) Berechnen Sie seine Startgeschwindigkeit.
   b) (1) Zeigen Sie, dass für die maximale Flughöhe H gilt:
   $$H = \frac{v_0^{\,2} \cdot \sin^2 \alpha}{2g}.$$
   (2) Ermitteln Sie die maximale Flughöhe im vorliegenden Fall.
   (3) Überprüfen Sie das Ergebnis von (2) anhand einer Energiebetrachtung.
   c) Zeichnen Sie die Zeit-Geschwindigkeits-Diagramme in x- und y-Richtung.

M6 Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen!

Der waagerechte Wurf

Ein Tennisspieler schlägt einen Tennisball aus einer Höhe von 2,30 m parallel zum Erdboden ab.

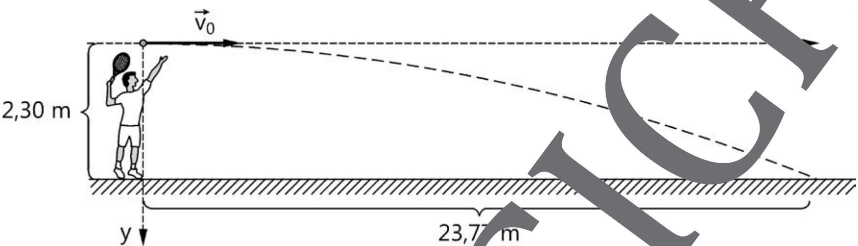

Abb. 6, Grafik: Dr. Wolfgang Zettlmeier

a) Berechnen Sie, wie lange der Ball braucht, bis er (wie gezeichnet) genau 23,77 m weit fliegt, was der Länge eines Tennisplatzes von Grundlinie zu Grundlinie entspricht. (4 BE)

b) Berechnen Sie, welche Anfangsgeschwindigkeit v_0 der Spieler dazu dem Ball geben muss. (2 BE)

c) Berechnen Sie, unter welchem Winkel und mit welcher (Effektiv-)Geschwindigkeit der Ball am Boden auftrifft. (8 BE)

d) Zeigen Sie, dass der Ball so über ein in der Mitte des Tennisplatzes aufgestelltes Netz kommen würde, wenn das Netz genau 91,4 cm hoch ist. Untersuchen Sie, mit welcher Geschwindigkeit der Tennisspieler mindestens abschlagen müsste, damit der Ball auf einer solchen Flugbahn über das Netz kommen würde.
Nehmen Sie zum Ergebnis auch kritisch Stellung. (9 BE)

M 7 Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen!

Der schiefe Wurf

Ein Kugelstoßer stößt die Kugel aus einer Höhe $h = 1{,}80\ \text{m}$ unter einem Winkel von 40,0° gegenüber der Horizontalen mit einer Geschwindigkeit von 13,[illegible] $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ab.

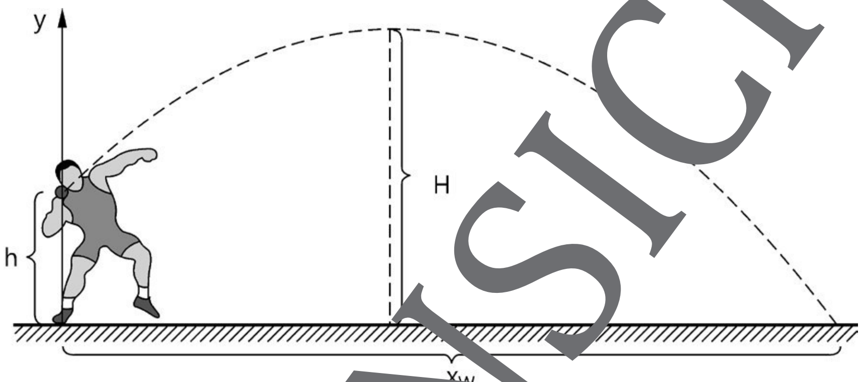

Abb. 7, Grafik: Dr. Wolfgang Zettlmeier

a) Begründen Sie durch Aufstellen der zugehörigen Bewegungsgleichung, dass die Kugel auf einer Parabelbahn fliegt. (8 BE)

b) Berechnen Sie die Flugdauer der Kugel sowie die Stoßweite x_W. (9 BE)

c) Berechnen Sie die maximale Flughöhe H der Kugel. (6 BE)