UNTERRICHTS MATERIALIEN

Physik Sek. II

Offene Kometenbahn

Gilt für eine parabelförmige Kometenbahn auch Keplers Flächensatz?

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Physik

5/2019

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Anna-Greta Wittnebel
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Illustrationen: Dr. Wolfgang Zettlmeier
Bildnachweis Titel: NASA
Korrektorat: Johanna Stotz, Wyhl a. K.

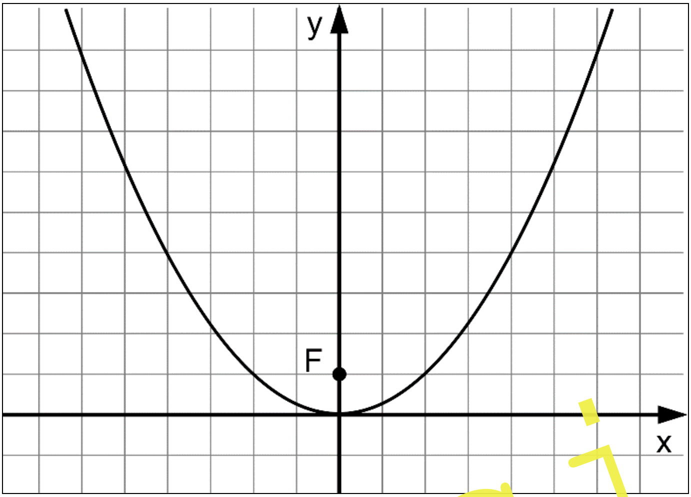

Abb. 1: Parabel mit k = 0,5

1. Weisen Sie die Gültigkeit von Gleichung (1) nach.

   Anleitung:
   Denken Sie sich die Parabel als Querschnitt eines Parabolspiegels in der x-y-Ebene. Denken Sie sich außerdem einen Lichtstrahl, welcher parallel zur y-Achse in diesen Spiegel einfällt.
   Er trifft im Punkt A(a|g(a)) die „Spiegelparabel".
   Der reflektierte Strahl schneidet die y-Achse im Brennpunk F.
   Um das Reflexionsgesetz anwenden zu können, ist der Spiegel bei A zu „begradigen"; dort ist die Parabel durch ihre Tangente t zu ersetzen.
   Und t ist der Graph der linearen Funktion

   $$t:\ x \mapsto t(x) = m \cdot x + b_y = g'(a)(x-a) + g(a)\ .$$

   Wenn Sie dann nachweisen, dass

   $\alpha = \beta = \gamma$

   gilt (s. Abb. 2), lässt sich die Koordinate f leicht berechnen.

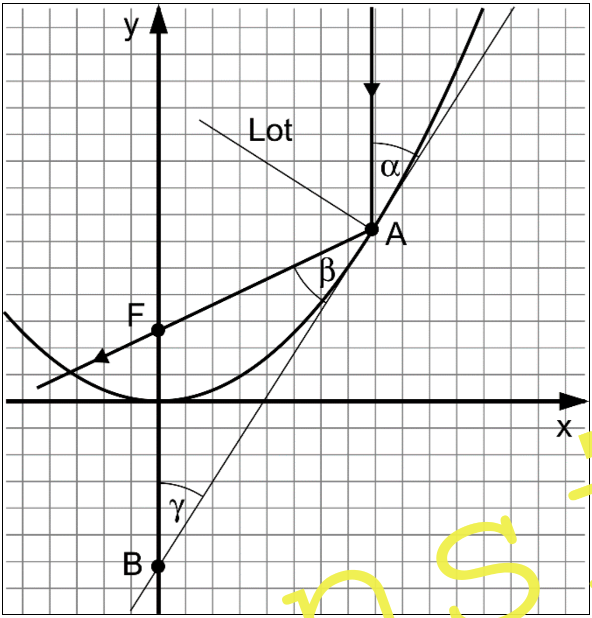

Abb. 2:
Beachten Sie den unterschiedlichen Maßstab auf den Achsen.

2 Wenn der Flächensatz auch auf parabelförmige Kometenbahnen zutrifft, dann überstreicht der Fahrstrahl Sonne–Komet in gleichen Zeiten Δt gleiche Flächen ΔA .

Mit anderen Worten ist $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ eine zeitunabhängige Konstante; sie ist eine „Flächengeschwindigkeit“.

Wie berechnet man eine Flächengeschwindigkeit zwischen zwei Parabelpunkten P_1 und P_2 ?

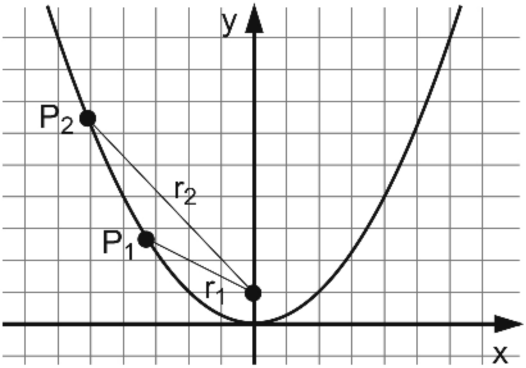

Abb. 3

Wenn Δt nicht allzu groß ist, dann ist die Fläche des Dreiecks ΔP_1P_2F sicherlich eine brauchbare Beschreibung für ΔA.
Kenntnisse aus der linearen Algebra liefern das Ergebnis:

$$\Delta A \;=\; \tfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{FP_1} \times \overrightarrow{FP_2}\right| \qquad (2)$$

Es fehlt noch die Berechnung der Zeit Δt, welche der Komet benötigt, um die Bahn zwischen P_1 und P_2 zurückzulegen.
Ist v_i die Geschwindigkeit des Kometen im Punkt P_i, $(i = 1, 2)$, so können wir die Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\overline{v}_{12} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

näherungsweise als die Geschwindigkeit ansehen, mit der sich der Komet zwischen den Bahnpunkten P_1 und P_2 bewegt. Wir benötigen jedoch v_i für $i = 1, 2$.

Hier hilft der **Energieerhaltungssatz** weiter: die Summe aus kinetischer und potenzieller Energie des Kometen ist in jeder Position dieselbe. Diese Summe bezeichnen wir als die (mechanische) Gesamtenergie E_{ges} des Kometen. Für die potenzielle Energie vereinbaren wir, dass sie im Unendlichen null sei. (Das Nullniveau legen wir also ins Unendliche.)

Begründen Sie, dass die (mechanische) Gesamtenergie E_{ges} des Kometen in jeder Position gleich null ist.

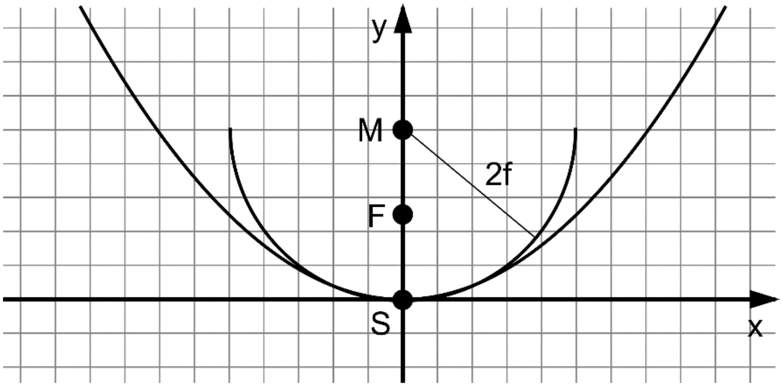

Abb. 4 Krümmungskreis der Parabel im Schnittpunkt S.
M ist der Mittelpunkt des Krümmungskreises.

3. Wir nehmen nun an, dass der Komet auf der Parabel mit $k = 0{,}2$ die Sonne umläuft.

   Es sei $x_1 = -1{,}00$ LE und $x_2 = -1{,}05$ LE. Maßstab: 1 LE $\hat{=}$ 10^{12} m.
   Die Positionen $P_1(x_1|g(x_1))$ und $P_2(x_2|g(x_2))$ durchlaufe der Komet nacheinander.

   Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Kometen zwischen den beiden Positionen und mit diesem Ergebnis die zugehörige Flächengeschwindigkeit.

4. Da wir nun wissen, wie man eine Flächengeschwindigkeit auf parabelförmiger Flugbahn berechnet, können wir uns jetzt die Überprüfung des Flächensatzes vornehmen. Die Kometenpositionen legen wir fest durch:

   $$x_i = -\left(i \cdot 4 \cdot 10^{-3} + 1\right) \text{ LE} \quad \text{für } i = 0, 1, \ldots, 25.$$

   Berechnen Sie die Flächengeschwindigkeiten des Kometen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Positionen.
   Kommentieren Sie Ihr Ergebnis.

Kompetenzprofil

- Niveau: Oberstufe; grundlegend
- Fachlicher Bezug: Differenzialrechnung (Ableitung, Tangentengleichung, Krümmungskreis der Parabel); lineare Algebra (Rechnen mit Vektoren, Vektorprodukt)
- Kommunikation: argumentieren, diskutieren, bewerten
- Problemlösen: reproduzieren, Lösungen berechnen
- Modellierung: –
- Medien: Taschenrechner (am besten programmierbar), Formelsammlung
- Methode: Einzel- oder Gruppenarbeit, Neues erforschen, auch zum selbstständigen Erarbeiten des Themas geeignet
- Inhalt in Stichworten: Gravitationsgesetz, Radialkraft, mechanische Gesamtenergie eines Satelliten auf parabelförmiger Bahn um seinen Zentralkörper

Autor: Gerhard Deyke, Hamburg
Illustrationen von: Dr. Wolfgang Zettlmeier

Lösung

1. Die Winkel α und γ sind als Stufenwinkel an „geschnittenen“ Parallelen gleich groß. Da ferner Einfallswinkel und Reflexionswinkel am „begradigten“ Spiegel gleich groß sind, gilt auch:

   $90° - \alpha = 90° - \beta$

   und folglich auch $\alpha = \beta$. Alle drei Winkel sind demnach gleich groß.
   Hieraus folgt unmittelbar, dass das Dreieck ΔAFB gleichschenklig ist; wir haben also $|FA| = |FB|$.
   B hat die Koordinaten $(0|t(0))$, wenn t die Tangentenfunktion im Punkt A ist. Nun ist

   $t(x) = g'(a)\,(x - a) + g(a) = 2\,k\,a\,(x - a) + ka^2,$

   also

   $t(0) = -2\,ka^2 + ka^2 = -ka^2.$

   Auf das rechtwinklige Dreieck ΔACF lässt sich der Satz des Pythagoras anwenden (s. Abb. 5):