

# UNTERRICHTS MATERIALIEN

## Physik Sek. II



### Das Zeigermodell

Grundlagen und Rechenbeispiele

## Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Physik

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für die elektronische oder sonstige Vervielfältigung, Übersetzung, Verbreitung und öffentliche Zugänglichmachung.

Für jedes Material wurden die Endrechte recherchiert und angefragt. Sollten dennoch an einzelnen Materialien weitere Rechte bestehen, bitten wir um Benachrichtigung.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH  
Ein Unternehmen der Klett Gruppe  
Rotebühlstraße 77  
70178 Stuttgart  
Telefon +49 711 62900-0  
Fax +49 711 62900-60  
meinRAABE@raabe.de  
www.raabe.de

Redaktion: Anna-Greta Wittnebel

Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Karlsruhe

Illustrationen: Julia Lenzmann, Dr. Wolfgang Zettlmeier

Bildnachweis Titel: 2005. Vorlesungssammlung Physik, Universität Ulm

## Das Zeigermodell – Grundlagen und Rechenbeispiele

### Merke

Eine harmonische (d. h. sinusförmige) Welle, die sich auf einem Wellenträger in positive x-Richtung ausbreitet, lässt sich mathematisch durch die Wellengleichung

$$y(t, x) = \hat{y} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right) \quad (1.1)$$

beschreiben. In dieser grundlegenden Gleichung bedeuten

t: Zeit,

x: Ausbreitungsrichtung der Welle,

y: Auslenkung des Wellenträgers am Ort x zur Zeit t aus der Ruhelage,

$\hat{y}$ : Amplitude = maximale Auslenkung,

T: zeitliche Periode der Welle (Periodendauer),

$\lambda$ : räumliche Periode der Welle (Wellenlänge),

$\varphi_0$ : Startphasenwinkel (Argument des Sinus für  $x = 0$  und  $t = 0$ ),

$\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0$ : Phasenwinkel (Argument des Sinus für t, x);

Einheit: Radiant (rad).

Abbildung 1.1 zeigt drei Momentaufnahmen des Graphen einer harmonischen Welle zu verschiedenen Zeitpunkten t (x-y-Diagramm bei jeweils festem t).

Es ist deutlich zu erkennen, dass sich die Welle mit wachsendem t in positive x-Richtung bewegt.

Wie man sieht, legt die Welle beispielsweise in dem Zeitintervall T/4 (hier: 1 s) die Strecke  $\lambda/4$  (hier: 2 cm) zurück. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c einer harmonischen Welle ist daher stets gegeben durch

$$c = \frac{\lambda}{T} \quad (1.2)$$

(hier: 2 cm/s).

Der konstante Startphasenwinkel  $\varphi_0$  legt die Auslenkung y des Wellenträgers zur Zeit  $t = 0$  s am Ort  $x = 0$  cm fest.

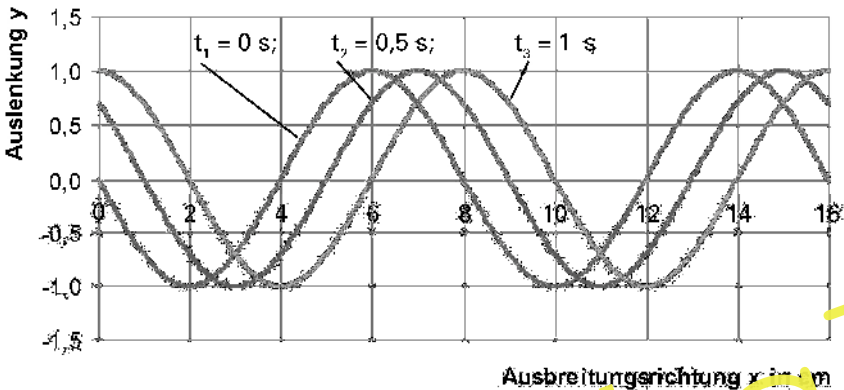


Abb. 1.1: Grafische Darstellung einer harmonischen Welle mit  $\hat{y} = 1$ ,  $T = 4$  s,  $\lambda = 8$  cm und  $\varphi_0 = 0$  zu drei verschiedenen Zeitpunkten  $t_1 = 0$  s,  $t_2 = 0,5$  s,  $t_3 = 1$  s

**Bemerkung:**

$$y(0,0) = \hat{y} \sin(\varphi_0) \quad (1.3)$$

Ein positiver/negativer Startphasenwinkel  $\varphi_0$  verschiebt eine Welle im x-y-Diagramm um die Strecke

$$\delta_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \varphi_0 \quad (1.4)$$

in Ausbreitungsrichtung/entgegen der Ausbreitungsrichtung. Die verschobene Welle hat dann gegenüber der ursprünglichen den Gangunterschied  $\delta_0$ .

**Wellengleichung für eine Welle, die sich nach links ausbreitet**

Neben der Gleichung (1.1) beschreibt auch die Funktion

$$y(t,x) = \hat{y} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right) \quad (1.5)$$

eine harmonische Welle. Im Unterschied zur Welle (1.1) breitet sich Welle (1.5) in negative x-Richtung aus (d. h. nach links, wenn die x-Achse wie üblich nach rechts zeigt).

- 1.5 Welchen Einfluss hat der Startphasenwinkel  $\varphi_0$  auf die in  $-x$ -Richtung laufende Welle (1.5)?
- 1.6 Auf einem Wellenträger breitet sich eine harmonische Welle aus. Am Ort  $x = 0$  und zur Zeit  $t = 0$  beträgt die Auslenkung  $5,0$  cm bei abnehmender Tendenz. Die Amplitude beträgt  $10$  cm. Bestimmen Sie den Startphasenwinkel  $\varphi_0$ .
- 1.7 Welche Wellenlänge hat eine Welle, die eine Periodendauer von  $1,0$  ms hat und deren Ausbreitungsgeschwindigkeit  $100$  m/s beträgt?

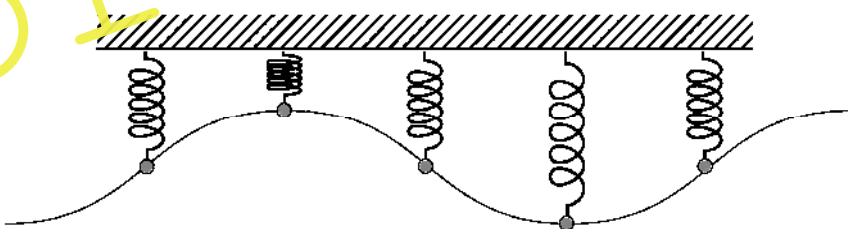
### Interpretation der Wellengleichungen

Die harmonischen Wellen (1.1) und (1.5) lassen sich auch in der Form

$$y(t, x) = \hat{y} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \phi(x)\right) \quad \text{mit } \phi(x) = \pm \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_0 \quad (1.6)$$

zusammenfassen (negatives Vorzeichen bei Ausbreitung in positive  $x$ -Richtung, positives Vorzeichen bei Ausbreitung in negative  $x$ -Richtung). Diese Schreibweise legt die folgende Interpretation nahe:

Jeder Punkt  $x$  eines Wellenträgers führt eine harmonische Schwingung mit der Amplitude  $\hat{y}$  und der Periodendauer  $T$  aus. Die Schwingungen an verschiedenen Orten  $x$  sind jedoch zueinander phasenverschoben (siehe Abb. 1.3–1.4).



Grafik: J. Lenzmann

Abb. 1.3: Identische Federpendel, die mit gleichen Amplituden und Periodendauern in definierter Weise zueinander phasenverschoben schwingen, bilden eine harmonische „Federpendelwelle“.

## Eine sich kreisförmig ausbreitende Wasserwelle

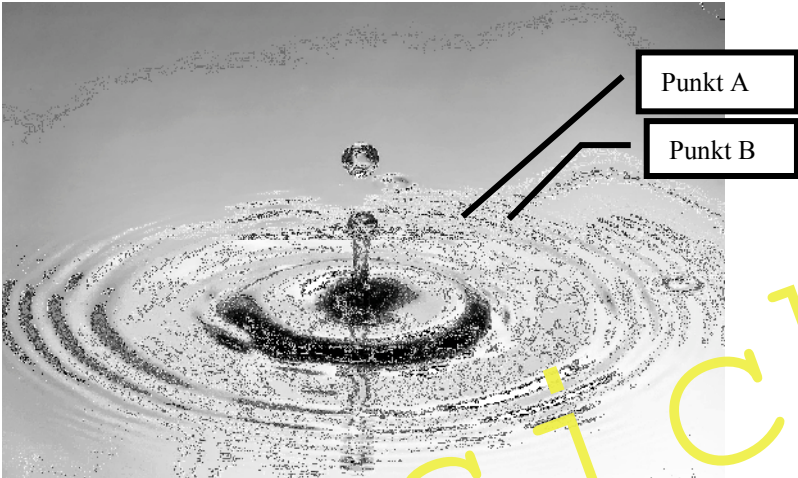


Abb. 1.4: Kreisförmige Wasserwellen auf einer Wasseroberfläche. Die beiden Schwingungen in den Punkten A und B sind daher um  $\pi$  Phasenverschoben. Foto: Thinkstock

### **Merke: Eine Welle transportiert Energie**

Wenn eine Welle sich ausbreitet, transportiert sie auch stets Energie.

Die Leistung  $P$  (Energie pro Zeiteinheit) bzw. die Intensität  $I$  (Leistung  $P$  pro Querschnitt  $A$ ) einer Welle sind daher wichtige Kenngrößen.

Bei einer Schwingung (z. B. eines Federpendels) ist die Gesamtenergie zum Quadrat der Amplitude proportional. Dies trifft auch für die Gesamtenergie bzw. die Leistung oder Intensität einer harmonischen Welle zu.

$$I = \frac{P}{A} = k \hat{y}^2 \quad (1.7)$$

Welchen Wert die Proportionalitätskonstante  $k$  im Einzelnen annimmt, hängt von der Natur der Wellen ab (Schallwelle, Lichtwelle, ...) und ist für das Weitere von untergeordneter Bedeutung.

- 1.8 Wie ändern sich Intensität und Leistung einer harmonischen Welle, wenn deren Amplitude verdreifacht und der Querschnitt zugleich verdoppelt wird?

Auf einem Kreis (Radius  $R$ ) bewegt sich gegen den Uhrzeigersinn ein Körper mit konstanter Bahn- bzw. Winkelgeschwindigkeit (siehe Abb. 2.1). Für einen Umlauf benötigt er die Zeit  $T$ . Zur Zeit  $t = 0$  s befindet sich der Körper in der Position  $\varphi_0$ . Projiziert man die Positionen des umlaufenden Körpers zu verschiedenen Zeiten waagrecht auf die  $y$ -Achse:

$$y(t) = R \sin(\varphi(t)) \quad (2.1),$$

so erkennt man in einem  $t$ - $y$ -Diagramm den Graphen der harmonischen Schwingung. Hierbei entspricht der Kreisradius  $R$  der Amplitude  $\hat{y}$  der Schwingung ( $\hat{y} = R$ ). Die Periodendauern der Drehbewegung und der Schwingung sind identisch.

Mithilfe eines Federpendels und einer an einer rotierenden Stange befestigten Kugel kann man den Sachverhalt, der hier erläutert wurde, in einfacher Weise auch experimentell demonstrieren (siehe Abb. 2.2).

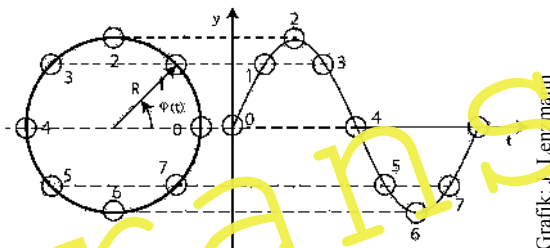
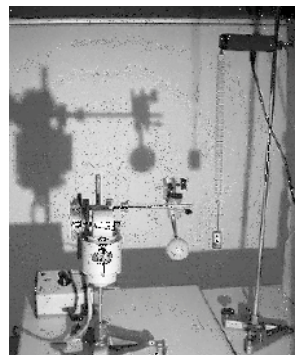


Abb. 2.1 (unmittelbar darüber): Ein auf einem Kreis umlaufender Körper (dargestellt in acht verschiedenen Positionen) und das entsprechende  $t$ - $y$ -Diagramm ( $\varphi_0 = 0$ )

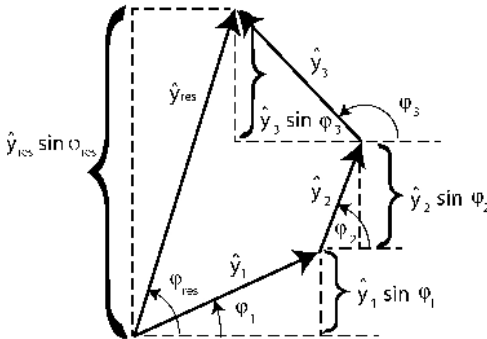
Abb. 2.2 (rechts): Mithilfe eines Scheinwerfers werden die Kugel, die sich auf einem Kreis bewegt, und der Pendelkörper eines Federpendels an eine Wand projiziert. Bei entsprechender Anpassung (Periodendauer des Federpendels = Periodendauer der Kreisbewegung; Kreisradius = Amplitude der Schwingung; beide Startphasenwinkel gleich) bewegen sich die Schatten der beiden Körper in gleicher Weise.



© Karl-Heinrich Meyberg. Aus:  
<http://gfs.khmeyberg.de/0910/0910Kurs12>  
 Ph3g/0910UnterrichtPhysik12PH3gSchwingungenundWellen.html

Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 3.1 veranschaulicht. Die Regel (3.1) bzw. die Regel (3.2)/(3.3) bezeichnet man als Superpositionsprinzip (= Prinzip der ungestörten Überlagerung).

**Grafische Veranschaulichung**



Grafik: J. Lenzmann

Abb. 3.1: Überlagerung dreier Wellen im Zeigermodell. Diese Darstellung gilt für einen bestimmten Ort  $x$  zu einer bestimmten Zeit  $t$ . Die Projektionen der drei Teilwellen auf die  $x$ -Achse sind zusammen so lang wie die Projektion des resultierenden Zeigers.

Spezialfall: Häufig superponiert man nur zwei Wellen. Diesen Spezialfall betrachten wir genauer.

$$y_{res}(t, x) = \hat{y}_1 \sin(\varphi_1(t, x)) + \hat{y}_2 \sin(\varphi_2(t, x)) \tag{3.4}$$

Abbildung 3.2 zeigt das dazugehörige Zeigerdiagramm. Mithilfe des Kosinussatzes lässt sich die Amplitude der resultierenden Welle berechnen:

$$\hat{y}_{res}(t, x) = \sqrt{\hat{y}_1^2 + \hat{y}_2^2 - 2\hat{y}_1\hat{y}_2 \cos(\pi - \Delta\varphi)} = \sqrt{\hat{y}_1^2 + \hat{y}_2^2 + 2\hat{y}_1\hat{y}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \tag{3.5}$$

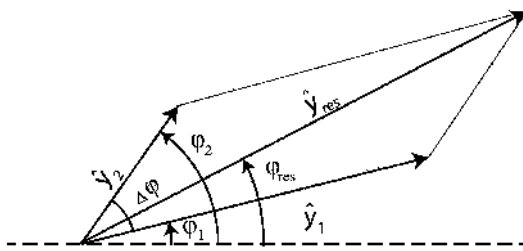


Abb. 3.2: Addition zweier Zeiger



**Intensität**

Die resultierende Welle hat wegen Gleichung (1.7) eine Intensität von

$$I_{\text{res}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (I_{1,2}: \text{Intensität der Welle 1, 2}). \quad (3.6)$$

Für den Winkel, den der resultierende Zeiger mit der Waagrechten bildet, lesen wir aus Abbildung 3.2 ab:

$$\tan(\varphi_{\text{res}}) = \frac{\hat{y}_1 \sin(\varphi_1) + \hat{y}_2 \sin(\varphi_2)}{\hat{y}_1 \cos(\varphi_1) + \hat{y}_2 \cos(\varphi_2)} \quad (3.7)$$

Damit haben wir die aus der Überlagerung zweier Wellen resultierende Welle vollständig berechnet:

$$y_{\text{res}}(t, x) = \hat{y}_{\text{res}} \sin(\varphi_{\text{res}}(t, x)) \quad (3.8)$$

mit

$$\varphi_{\text{res}} = a \tan 2 \left( \frac{\hat{y}_1 \sin(\varphi_1) + \hat{y}_2 \sin(\varphi_2)}{\hat{y}_1 \cos(\varphi_1) + \hat{y}_2 \cos(\varphi_2)} \right) \quad (3.9)$$

Hierbei ist die Funktion „atan2“ wie folgt definiert:

$$\text{atan} 2 \left( \frac{y}{x} \right) := \begin{cases} \arctan \left( \frac{y}{x} \right) & \text{für } x > 0 \\ \arctan \left( \frac{y}{x} \right) + \pi & \text{für } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan \left( \frac{y}{x} \right) - \pi & \text{für } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0, y = 0 \end{cases}$$

In dem oft vorliegenden Fall, dass die Amplituden der beiden Wellen gleich sind ( $\hat{y}_1 = \hat{y}_2 = \hat{y}$ ), vereinfachen sich die Gleichungen (3.5) und (3.7) zu

$$\tan(\varphi_{\text{res}}) = \frac{\hat{y}_1 \sin(\varphi_1) + \hat{y}_2 \sin(\varphi_2)}{\hat{y}_1 \cos(\varphi_1) + \hat{y}_2 \cos(\varphi_2)} = \frac{2 \sin\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)},$$

### Schülerexperiment: Stimmen einer Gitarrensaite

🕒 Vorbereitung: 5 min Durchführung: 5 min

<b>Materialien</b>	
Stimmgabel ( $f = 440 \text{ Hz}$ )	klassische Gitarre

#### Versuchsdurchführung

Regen Sie eine Stimmgabel (Eigenfrequenz  $f = 440 \text{ Hz}$ ) mit einem kurzen Schlag zu einer Schwingung an. Sie hören den Kammerton a'. Zupfen Sie die am 5. Bund abgegriffene e'-Saite der Gitarre, die daraufhin ebenfalls mit dieser Frequenz schwingen sollte. Falls Sie keine Schwebung hören, ist die Saite korrekt gestimmt. Hören Sie jedoch eine Schwebung, ist die e'-Saite verstimmt. Verändern Sie die Saitenspannung dann so lange, bis Sie keine Schwebung mehr hören.

#### 6 Das Huygens'sche Prinzip

In der folgenden Lektion werden Beugungsprobleme behandelt. Die Grundlage hierfür ist das Huygens'sche Prinzip.

Wir betrachten die in Abbildung 6.1 dargestellte Situation.

Von einem Wellenerreger Q breitet sich isotrop (= in alle Richtungen gleich) eine Welle aus. Diese Welle trifft auf ein beugendes Hindernis. Die im Punkt P resultierende Welle ergibt sich dadurch, dass man alle Zeiger im Punkt P addiert, die zu den zwischen Q und P möglichen Wegen der Welle korrespondieren (Huygens'sches Prinzip).

Dabei ist zu beachten, dass sich eine Welle in einem homogenen Medium stets geradlinig ausbreitet und nur an Inhomogenitäten (z. B. an einem beugenden Hindernis oder an der Grenzfläche zwischen zwei Medien) ihre Richtung ändert, die Länge eines Zeigers (Amplitude der Welle) im Punkt P mit zunehmender Weglänge abnimmt.

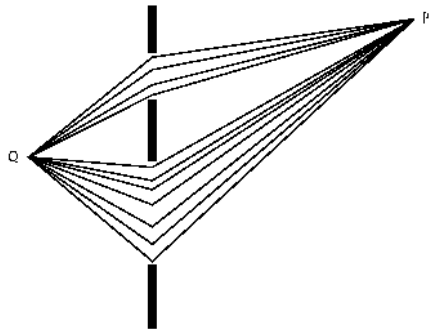


Abb. 6.1: Zum Huygens'schen Prinzip. Zur Berechnung der resultierenden Welle im Punkt P kommt es auf alle möglichen Wege zwischen Q und P an.

Grafik: W. Zettlmeier

## 7 Superposition zweier Wellen – Beugung am Doppelspalt

Wir betrachten die in Abbildung 7.1 dargestellte Situation.

Ein Mikrowellensender Q emittiert Wellen mit einer Wellenlänge von  $\lambda = 2,0 \text{ cm}$ . Sie fallen phasengleich auf die beiden Spalte bei  $S_1$  und  $S_2$ . Nach dem Huygens'schen Prinzip startet in jedem (sehr schmal angenommen) Spalt eine Elementarwelle. Diese beiden Elementarwellen überlagern sich zu einem resultierenden Wellenfeld. Dabei treten konstruktive und destruktive Interferenzerscheinungen auf. Wir untersuchen die Superposition der Elementarwellen in den Punkten  $P_1$  und  $P_2$ .

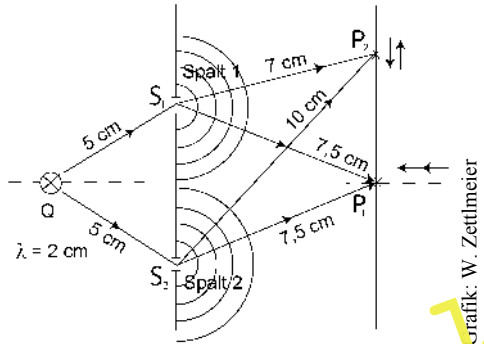


Abb. 7.1: Beugung an einem Doppelspalt. Die beiden Spalte werden als sehr eng angenommen, sodass in jedem Spalt nur eine Elementarwelle startet.

### Konstruktive Interferenz im Punkt $P_1$ :

Wir betrachten die Zeigeraddition im Punkt  $P_1$ . Die Wegstrecken  $\overline{QS_1}$  und  $\overline{S_1P_1}$  betragen zusammen  $12,5 \text{ cm}$ . Das gleiche Ergebnis erhalten wir für  $\overline{QS_2}$  und  $\overline{S_2P_1}$ . Die rotierenden Zeiger der beiden Wellen im Punkt  $P_1$  stehen daher zu jedem Zeitpunkt  $t$  parallel. Die beiden Wellen verstärken sich im Punkt  $P_1$  maximal. Dort liegt konstruktive Interferenz vor.

### Destruktive Interferenz im Punkt $P_2$ :

Ganz anders ist die Situation im Punkt  $P_2$ : Die Wegstrecken  $\overline{QS_1}$  und  $\overline{S_1P_2}$  betragen zusammen  $12 \text{ cm}$ . Für den aus  $\overline{QS_2}$  und  $\overline{S_2P_2}$  zusammengesetzten Weg liest man hingegen  $15 \text{ cm}$  ab. Der Gangunterschied der beiden Wellen im Punkt  $P_2$  beträgt somit  $\delta = 3,0 \text{ cm}$ , was  $1,5$  Wellenlängen bzw. einer Phasendifferenz von  $3\pi$  entspricht. Die rotierenden Zeiger der beiden Wellen im Punkt  $P_2$  stehen daher zu jedem Zeitpunkt  $t$  antiparallel. Die beiden Wellen löschen sich daher fast<sup>1</sup> vollständig aus (destruktive Interferenz).

<sup>1</sup> Da die Wegstrecken unterschiedlich lang sind, haben auch die Zeiger geringfügig unterschiedliche Längen.

### 8 Mehr als zwei Spalte – Beugung am Gitter

Wir betrachten nun – unter den gleichen vereinfachenden Annahmen wie beim Doppelspalt – die Beugung am Gitter. Ein Gitter besteht aus  $n$  periodisch angeordneten, identischen Spalten. Der Abstand zweier benachbarter Spalte wird mit  $g$  bezeichnet (Gitterkonstante). Im Weiteren beschränken wir uns auf die Berechnung der Hauptmaxima und der Minima beim Gitter.

Von diesen  $n$  Spalten laufen  $n$  parallele Elementarwellen los, die sich in großer Entfernung überlagern (Abb. 8.1). Zwei benachbarte Elementarwellen sind – wie beim Doppelspalt – gegeneinander verschoben. Der Gangunterschied bzw. die Phasenverschiebung zwischen zwei benachbarten Wellen beträgt wie beim Doppelspalt

$$\delta = g \sin(\alpha) \tag{8.1}$$

bzw.

$$\varphi = - \frac{2\pi}{\lambda} \delta = - \frac{2\pi}{\lambda} g \sin(\alpha). \tag{8.2}$$

Die sogenannten Hauptmaxima bei der Beugung am Gitter sind diejenigen Maxima, bei denen alle Zeiger der  $n$  Elementarwellen parallel stehen. Dies ist genau dann der Fall, wenn

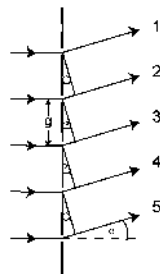
$$\frac{2\pi}{\lambda} g \sin(\alpha) = k 2\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{8.3}$$

bzw.

$$\sin(\alpha_k) = k \frac{\lambda}{g} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k_{\max} \text{ mit } k_{\max} \leq \frac{g}{\lambda}) \tag{8.4}$$

ist. Die Formel (8.4) zur Berechnung der Hauptmaxima des Gitters ist unabhängig von der Anzahl  $n$  der Spalte. Sie ist identisch mit der Formel (7.8) für die Maxima des Doppelspalts.

#### Grafische Darstellung



Grafik: W. Zettlmeier

Abb. 8.1: Einfallendes und gebeugtes Licht beim Gitter in der Fraunhofer-Näherung

**Kompetenzprofil**

- Niveau: vertiefend
- Fachlicher Bezug: Physik, Optik
- Kommunikation: begründen
- Problemlösen: Lösungen berechnen
- Modellierung: Verstehen des Zeigermodells in der Optik
- Medien: PC
- Methode: Einzelarbeit, Gruppenarbeit
- Inhalt in Stichworten: harmonische Welle, Projektion einer Kreisbewegung, Zeigermodell, Superpositionsprinzip, Schwebung, Huygens'sches Prinzip

**Autor:** Axel Donges, Isny im Allgäu

**Lösungen**

**1 Die harmonische Welle – mathematische Beschreibung**

1.1  $y(t, x) = \hat{y} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right)$

$$y(10 \text{ s}, 74 \text{ cm}) = 1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3,5} \cdot 10 - \frac{2\pi}{6} \cdot 74 + 2,0\right)$$

$$= \sin(-57,54) = -0,84$$

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{6,0 \text{ cm}}{3,5} = 1,7 \text{ cm/s}$$

1.2  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

$$\delta = \frac{\lambda}{2\pi} \Delta\varphi = \frac{10 \text{ cm}}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{5}{12} \text{ cm} = 0,42 \text{ cm} = 4,2 \text{ mm}$$

1.3  $\varphi = \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \hat{=} 30^\circ$

1.4

Die Welle ist tatsächlich in 1,0 s 1,5 cm nach links gelaufen. Dies entspricht der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.

