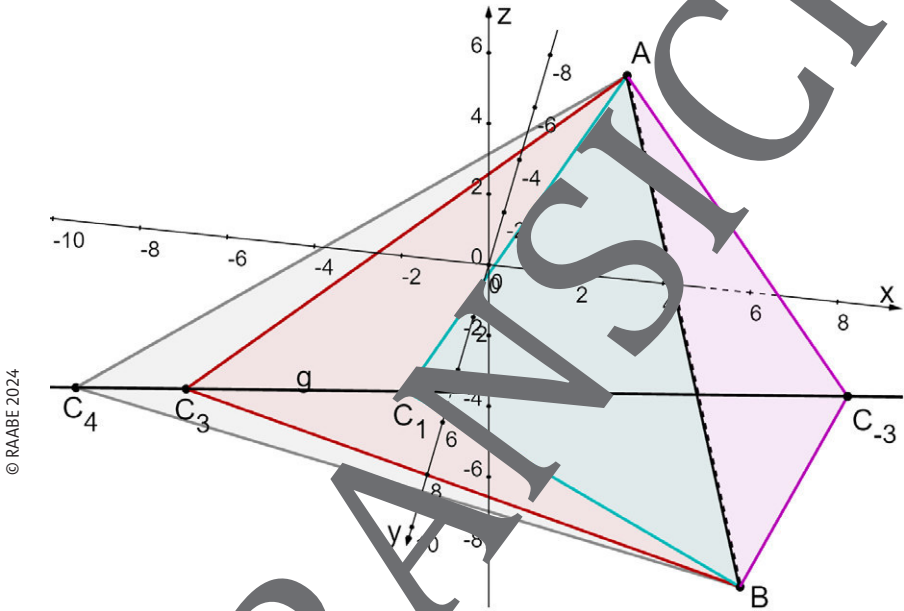


S.2.6

Analytische Geometrie und Stochastik

Flächeninhalte bei einer Dreieckschar

Günther Weber



Zwei feste Punkte A und B bilden mit einem Punkt einer Punkteschar C_k eine Dreieckschar. Die Schülerinnen und Schüler zeigen, dass alle Punkte der Schar auf einer Geraden liegen und dass alle Dreiecke gleichwinklig sind. Sie bestimmen die Parameter der Punkte C_k , sodass das entstehende Dreieck gleichseitig bzw. rechtwinklig ist, und stellen eine von k abhängige Flächeninhaltfunktion für die Dreiecke auf. Mit den Methoden der Analysis untersuchen sie diese Funktion bei eingeschränktem Definitionsbereich. Stochastische Überlegungen kommen ins Spiel, wenn die Jugendlichen mittels einer Unterteilung der entstehenden Flächeninhalte in vier Gruppen Ereignisse festlegen, deren Lösung mithilfe von (gekürzten) Baumdiagrammen oder der Binomialverteilung erfolgt.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10/11/12/13
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischer, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
Methoden:	Analyse, Auswertung, Computer- und Softwareeinsatz, Diagrammerstellung
Thematische Bereiche:	Geradengleichung, gleichseitige (rechtwinklige) Dreiecke, Ebene in Normalenform, Extrempunkte, Tangente, Tangente, Mittelwert einer Funktion, Pfadadditionsregel, Pfadmultiplikationsregel, Dreimal-mindestens-Aufgabe, Binomialverteilung

Fachliche Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Die Lernenden kennen die Zweipunkt-Form bzw. Punkt-Richtungs-Form der Geradengleichung sowie die Normalform der Ebenengleichung. Das Bestimmen eines Parameters, sodass ein Dreieck gleichseitig oder rechtwinklig ist, bereitet ihnen ebenso wenig Schwierigkeiten wie die Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks. Die Bestimmung des Flächeninhalts eines Dreiecks mithilfe des Vektorprodukts muss nicht bekannt sein. Die Jugendlichen können die globalen Hoch- und Tiefpunkte bei einer Funktion mit eingeschränktem Definitionsbereich bestimmen. Die Formel zur Berechnung des Mittelwertes einer Funktion muss nicht bekannt sein und kann den Schülerinnen und Schülern vor der Berechnung des Mittelwertes bereitgestellt werden. Die Schülerinnen und Schüler kennen umfangreichere Baumdiagramme und können die Pfadmultiplikations- bzw. Pfadadditionsregel anwenden. Die Dreimal-mindestens-Aufgabe und die Binomialverteilung sind ihnen bekannt.

Lernpläne

Im Kernlernplan des Landes Nordrhein-Westfalen

(https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GoSt_Mathematik.pdf (außer Kraft vom 02.01.2024)) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen, die der Beitrag gezielt fördert:

Kompetenzerwartungen aus der **Analytischen Geometrie**

Die Schülerinnen und Schüler ...

- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar,
- deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es,
- untersuchen mithilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung),
- stellen Ebenen in Normalenform dar,
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen.

Kompetenzerwartungen aus der **Analysis**

- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- verwenden das notwendige Kriterium und das Vorzeichenwechselkriterium zur Bestimmung von Extrempunkten,
- unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich,
- verwenden am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen,
- bilden die Ableitung weiterer Funktionen: Potenzfunktion sowie mit rationalen Exponenten,
- wenden die Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionen an.

Kompetenzerwartungen aus der **Stochastik**

- verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente,
- erklären die Binomialverteilung und berechnen dabei Wahrscheinlichkeiten,
- stellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf und führen Erwartungswertbetrachtungen durch,
- beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente und ermitteln Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Pfadregeln,
- modellieren Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen.

Zudem nutzen die Lernenden mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zur Veranschaulichung der Aufgabenstellung und zur Überprüfung der Ergebnisse.

Didaktisch-methodische Hinweise

Bei **Aufgabe 1)** sind die Aufgabenteile a), b), c), e) und f) so, dass sie auch im hilfsmittelfreien Teil des Abiturs vorkommen können. Einige Aufgabenteile sollten daher per Hand gerechnet werden. Ist die geometrische Bedeutung des Vektorprodukts nicht bekannt, so kann sie bei Aufgabenteil f) veranschaulicht werden. Für die meisten Aufgabenteile bei Aufgabe 1) gibt es mehrere Rechenwege. Sie können Ihre Lerngruppe aufteilen und die Aufgaben dann gruppenweise auf unterschiedliche Arten lösen und anschließend vergleichen lassen.

Bei **Aufgabe 2)** weisen Sie darauf hin, dass der Definitionsbereich eingeschränkt und dass es nicht nur relative, sondern auch absolute Extrempunkte gibt. Ist die Formel zur Berechnung des Mittelwerts einer Funktion nicht bekannt, so geben Sie diese vor. Bei **Aufgabe 3)** wird bei leistungsschwächeren Lerngruppen das Verfahren zur Bestimmung der äquidistanten

Flächenbereiche besprochen. Gleiches gilt für die geometrische Wahrscheinlichkeit, falls diese nicht bekannt ist. Da in den Aufgaben alle Bereiche der Oberstufenmathematik angesprochen werden, eignen sie sich gut zur Abiturvorbereitung.

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

ihre bereits erworbenen Fähigkeiten in der analytischen Geometrie im räumlichen Koordinatensystem, in der Analysis sowie der Stochastik sicher anzuwenden. Sie bestimmen Gleichungen von Geraden, Parameter von Punkten und berechnen Flächeninhalte von Dreiecken. Sie bestimmen die Extrema und den Mittelwert der Flächeninhalte. Die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen wird mithilfe der Pfadmultiplikations- und Pfadadditionsregel sowie der Binomialverteilung bestimmt.

Auf einen Blick

Flächeninhalte bei einer Dreieckschar

M 1

Aufgaben

Benötigt:

- GTR/CAS
- GeoGebra
- MS Excel

Aufgaben

M 1

- Gegeben sind die Punkte $A(3|-1|5)$, $B(7|7|-3)$ sowie die Punkteschar $C_k(1-2k|2+3k|-2+2k)$, $k \in \mathbb{R}$
 - Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden h , auf der alle Punkte C_k liegen.
 - Zeigen Sie rechnerisch, dass die Gerade g_{AB} , auf der die Punkte A und B liegen, und die Gerade h windschief sind.
 - Zeigen Sie, dass alle Dreiecke ABC_k gleichschenkelig sind.
 - Bestimmen Sie k auf zwei Nachkommastellen, sodass das Dreieck ABC_k gleichwinklig wird.
 - Bestimmen Sie k auf zwei Nachkommastellen, sodass das Dreieck ABC_k in Eckpunkt C_k einen rechten Winkel hat und geben Sie die Koordinaten der zu k gehörigen Eckpunktes an.
 - Berechnen Sie den Flächeninhalt der Dreiecke ABC_k abhängig von k .
- Für die folgenden Aufgabenteile sei $k \in [0;4]$ und es ist $A(k) = 6 \cdot \sqrt{17k^2 - 2k + 26}$, $k \in [0;4]$ die Flächeninhaltsfunktion.
 - Bestimmen Sie rechnerisch die Extrempunkte der Funktion $A(k)$.
 - Eine Gerade s verläuft durch den absoluten Hoch- und Tiefpunkt und eine Gerade t verläuft parallel zu s . Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden t so, dass t eine Tangente an den Graphen der Funktion $A(k)$ ist und geben Sie den Berührungspunkt an.
 - Bestimmen Sie den Mittelwert der Flächeninhalte der Dreiecke.
- Verwendet wird die Funktion $A(k) = 6 \cdot \sqrt{17k^2 - 2k + 26}$, $k \in [0;4]$ aus Aufgabe 2).
 - Gerundet auf eine Nachkommastelle sind $A_{\min} = 30,6$ und $A_{\max} = 102,2$. Teilen Sie das Intervall $[A_{\min}; A_{\max}]$ in 4 gleich große Teilintervalle I_1, I_2, I_3 und I_4 auf und ermitteln Sie mit der Abbildung auf der nächsten Seite die zum Intervall gehörenden k -Werte.

Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online
14 Tage lang kostenlos!

www.raabits.de

