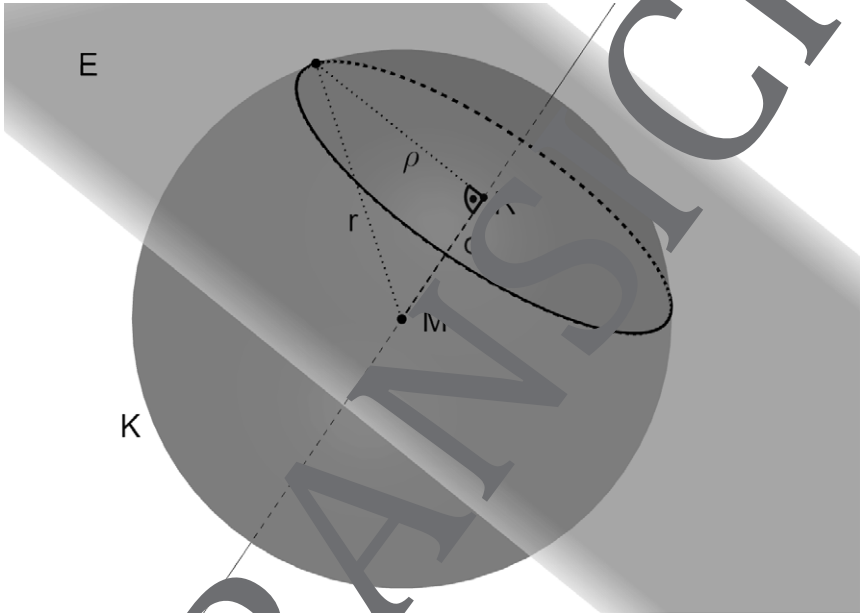


H.1.56

Kreis und Kugel

Kugeln, Ebenen und Kreise – Vermischte Übungsaufgaben

Alfred Müller



© RAABE 2024

© Günter Gerstbrein

Vier Übungsblätter bieten den Schülerinnen und Schülern eine Reihe von Aufgaben, die sich primär um die Kugel und den Gleichung drehen. Zusätzlich sind auch Kreise, Ebenen und Geraden Teil der Aufgaben. Die Aufgaben bestimmen Schnittpunkte und Schnittwinkel, Tangenten und Tangentialebenen sowie die gegenseitige Lage von Objekten. Das Wissen um Polare und Polarebenen sowie der zentrischen Streckung ist in einigen Aufgaben von Vorteil.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe: 10/11/12/13

Kompetenzen: Analysekompetenz, mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Problemlösekompetenz

Methoden: Analyse, Computer- und Softwareeinsatz, Übungen

Thematische Bereiche: Kugelgleichung, Kreisgleichung, Ebenen, Geraden, Abstands-berechnung, Winkelberechnung, Tangenten, Tangentialebene, Schnittkreis, zentrische Streckung

Fachliche Hinweise

Zur Lösung der Übungsaufgaben sind die Schülerinnen und Schüler bereits mit der Kugelgleichung bzw. der Kreisgleichung vertraut. Sie sind in der Lage, Abstände zu berechnen, Tangenten bzw. Tangentialebenen zu bestimmen und auch Polare und Polarebenen sind ihnen ein Begriff. Im Rahmen eines Beispiels ist auch die Kenntnis der zentrischen Streckung von Vorteil.

Auf einen Blick

Kugeln, Ebenen und Kreise

- M 1 Gerade, Ebenen und Kugeln
- M 2 Dreieck und Kugeln
- M 3 Kreis und eine Kugel
- M 4 Kugel und zwei Ebenen

Erklärung zu den Symbolen



einfaches Niveau



mittleres Niveau



schwieriges Niveau

Geraden, Ebenen und Kugeln

M 1

1. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind der Punkt $A(-1|4|0)$ und die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ gegeben.}$$

- a) Weisen Sie nach, dass der Punkt A nicht auf der Geraden g liegt. Bestimmen Sie außerdem eine Gleichung der Ebene E in Normalenform, die die Gerade g und den Punkt A enthält.
- b) Die Gerade h mit dem Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ geht durch den Punkt $M_1(2|3|-1)$.

Für welche Werte von a schneidet die Gerade h die Ebene E?

2. Gegeben sind die beiden Kugeln $K_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^2 = 36$ und $K_2: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^2 = 36$




- a) Der Punkt $B(0|-1|b>0)$ liegt auf der Kugel K_1 . Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangentialebene T im Punkt C an die Kugel K_1 .
- b) Zeigen Sie, dass die Ebene T auch die Kugel K_2 berührt und bestimmen Sie den Berührungspunkt C der Ebene T mit der Kugel K_2 .
- c) Die Ebenen E und T schneiden sich in einer Geraden s unter dem Winkel φ . Bestimmen Sie eine Gleichung von s sowie den Winkel φ .
- d) Weisen Sie nach, dass die Kugeln K_1 und K_2 symmetrisch zur Ebene E liegen und sich in einem Kreis k schneiden. Berechnen Sie Mittelpunkt R und Radius ρ des Schnittkreises k.
- e) Die Ebene E teilt die Kugel K_1 in zwei Teile, wobei einer der beiden Teile den Ursprung enthält. Hat ein Teil der Kugel das größere Volumen?





3. Eine Kugel $K_3: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \right]^2 = 4$ schneidet die Kugel K_1 rechtwinklig.

Bestimmen Sie den Wert m. Welche gegenseitige Lage haben die Kugeln K_2 und K_3 zueinander?

Kreise und eine Kugel

M 3

1. Gegeben sind der Kreis $k: x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 14x_2 + 49 = 0$ und der Punkt $P(0|-\frac{7}{2})$.
 - a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M_k und den Radius r_k des Kreises k . 
 - b) Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, die vom Punkt P an den Kreis k gelegt werden können? Wie groß ist der Winkel φ zwischen den Tangenten, und in welchen Punkten berühren die Tangenten den Kreis k ? 
 - c) Wie lautet die Gleichung der Kugel K im dreidimensionalen Raum, welche die Ebene $x_3 = 25$ berührt und die x_1x_2 -Ebene im Kreis k schneidet? 

2. Gegeben ist der Kreis $k': x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 8x_2 + 16 = 0$.
 - a) Berechnen Sie den Mittelpunkt M' und den Radius r' des Kreises k' . 
 - b) Vom Ursprung aus werden die Tangenten an den Kreis k' gelegt. Geben Sie deren Gleichungen und die Berührungspunkte mit k' an. 
 - c) Die in 2b) bestimmten Tangenten und der kürzere Kreisbogen begrenzen ein Flächenstück. Berechnen Sie seinen Inhalt. 
 - d) Geben Sie den Radius r des größten Kreises an, den Sie in das in 2c) beschriebene Flächenstück einzeichnen können. 

Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online
14 Tage lang kostenlos!

www.raabits.de

