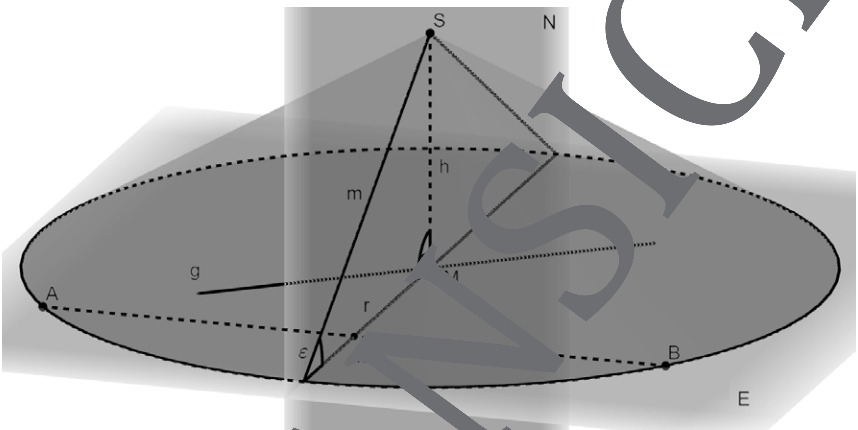
Kugel und Kegel, Quadrat und Parallelogramm – Vermischte Übungen mit Objekten im Raum

Alfred Müller



Grafik: Günter Gerstbrein

Sieben umfangreiche Übungsaufgaben stellen die Schülerinnen und Schüler vor unterschiedlichste Herausforderungen aus dem Bereich der Analytischen Geometrie. Dabei befassen sie sich mit verschiedenen Objekten im Raum, wie Kugeln, Kegeln oder Pyramiden. Sie bestimmen Schnittpunkte und Schnittkreise und stellen Ebenen- und Geradengleichungen auf. Auch die Ermittlung von Schnittwinkeln ist Teil der Aufgaben. Bei gegebenen Vierecken weisen sie nach, ob es sich um Quadrate oder Parallelogramme handelt, und bestimmen die Koordinaten fehlender Punkte. Die Berechnung von Flächeninhalten und Volumina der gegebenen Objekte runden den Aufgabenumfang ab.

RAABE
KLASSE SCHULE

Kugel und Kegel, Quadrat und Parallelogramm – Vermischte Übungen mit Objekten im Raum

Oberstufe (grundlegend/weiterführend)

Alfred Müller

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

– Kugel
– Kegel
– Pyramide
– Ebene
– Tangentialebene
– Quadrat
– Parallelogramm
– Winkelbestimmung
– Umkugel

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt

einfaches Niveau   mittleres Niveau   schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Übungsaufgaben	M1	AB

Kompetenzprofil:

Inhalt: Kugel, Kegel, Pyramide, Viereck, Quadrat, Parallelogramm, Flächeninhalte, Volumina, Winkelbestimmung, Gerade, Geradenschar, Ebene, Umkugel

Medien: GTR, CAS

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Übungsaufgaben

M1

1. Gegeben sind die Kugel $K: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 49$ und die Geradenschar mit dem Scharparameter p durch $g_p: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ p \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p \in \mathbb{R}$.

   a) Bestimmen Sie die Größe des Winkels φ, den die Geraden g_p mit ihrer senkrechten Projektion g´ in die x_1x_2-Ebene einschließt. Warum hängt dieser Winkel nicht vom Parameter p ab?
   b) Die Gerade g_{-2} für $p = -2$ schneidet die Kugel K in den Punkten S_1, S_2. Bestimmen Sie die Koordinaten dieser Punkte.
   c) Für ein beliebiges $p \in \mathbb{R}$ schneidet die Gerade g_p die Kugel K. Für welche Werte von p ergeben sich Tangenten? Geben Sie die Tangentengleichungen an.
   d) Stellen Sie die Gleichung einer Tangentialebene an die Kugel K auf, die eine dieser Tangenten enthält.

2. Die Punkte $A(5|1|2)$ und $B(-3|3|0)$ liegen auf dem Umfang des Grundkreises eines geraden Kreiskegels. Wenn S die Spitze des Kegels ist, dann beträgt die Länge einer Mantellinie $|\overrightarrow{AS}| = $ [illegible] LE. Der Mittelpunkt M des Grundkreises liegt auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   a) Berechnen Sie die Koordinaten des Grundkreismittelpunktes M sowie die Gleichung der Grundkreisebene E in Normalenform.
   b) Bestimmen Sie die Größe des Neigungswinkels ε einer Mantellinie gegen die Grundkreisebene E.
   c) Ein anderer, schiefer Kreiskegel mit dem gleichen Grundkreis, hat das doppelte Volumen wie der ursprüngliche Kegel. Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze S´ dieses schiefen Kreiskegels, wenn seine Spitze S´ auf der x_2-Achse liegen soll.