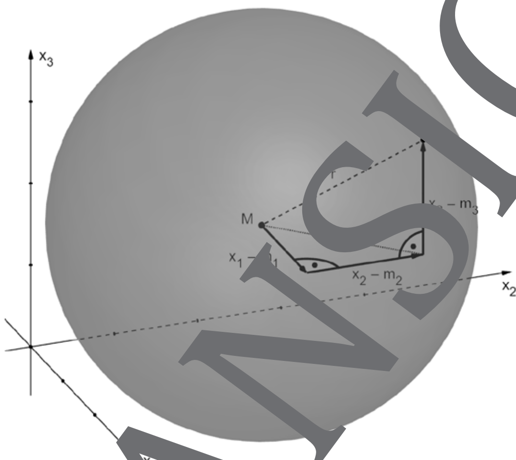
Die Kugel und ihre Gleichung – Theorie und Aufgaben

Alfred Müller



Grafik: Günter Gerstbrein

Um eine Kugel mathematisch zu beschreiben, braucht es lediglich einen Mittelpunkt und einen Radius. Die Schülerinnen und Schüler lernen, mit diesen beiden Angaben eine Kugelgleichung aufzustellen, und untersuchen, ob sich weitere gegebene Punkte innerhalb oder außerhalb der Kugel befinden.
Auch die Bestimmung der Lage zweier Kugeln zueinander wird behandelt: Liegt ein Berührpunkt oder ein Schnittkreis vor? Befindet sich eine der Kugeln ohne gemeinsame Punkte ganz innerhalb der anderen oder in einiger Entfernung daneben?
Ähnlich verhält es sich beim Zusammenspiel mit Geraden oder Ebenen: Liegen Schnitt- oder Berührpunkte vor oder gibt es einen Schnittkreis? Tangentialebenen und Polarebenen ist dabei jeweils ein eigenes Kapitel gewidmet.

Zu jedem der genannten Themen gibt es sowohl vorgerechnete Beispiele, anhand derer die Schülerinnen und Schüler die Theorie in der Praxis mitverfolgen können, als auch Übungsaufgaben, bei denen sie sich selbst daran versuchen können.

Die Kugel und ihre Gleichung – Theorie und Aufgaben

Oberstufe (grundlegend)

Alfred Müller

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

– Aufstellen einer Kugelgleichung
– Bestimmung der Lage von Punkten relativ zur Kugel
– Bestimmung der Lage von Ebenen und Geraden relativ zur Kugel
– Aufstellen der Gleichung von Tangentialebenen
– Aufstellen der Gleichung von Polarebenen

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt **BA** Bildanalyse **Bsp** Vorgerechnete Beispiele

Thema	Material	Methode
Definition und Gleichung	M1	AB, BA, Bsp
Schnitt: Kugel mit einer Geraden bzw. mit einer Ebene	M2	AB, BA, Bsp
Gegenseitige Lage zweier Kugeln	M3	AB, BA, Bsp
Tangentialebenen	M4	AB, BA, Bsp
Polarebenen	M5	AB, BA, Bsp

Kompetenzprofil:

Inhalt: Kugel, Kugelgleichung, Lagebeziehung zwischen Kugeln, Lagebeziehung zwischen Kugel und Gerade oder Ebene, Tangentialebene, Polarebene
Medien: GTR, CAS
Kompetenzen: Mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), mathematisch kommunizieren (K6)

Definition und Gleichung **M1**

Im Raum $\mathbb{R}^3$ ist in einem rechtwinkligen Koordinatensystem der Punkt M durch seinen Ortsvektor $\vec{m}$ gegeben. Wo liegen alle Punkte X, deren Entfernung vom Punkt M gleich einem Wert r LE ist?

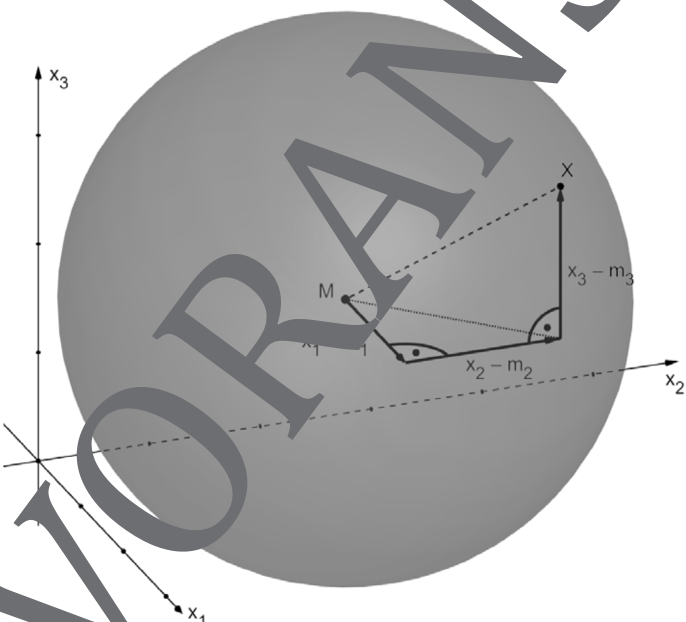
Definition

Die Punkte X, die von einem Punkt M die Entfernung r besitzen, liegen auf einer Kugel K (= Kugelfläche) um den Mittelpunkt M mit Radius r.
Es gilt:

$$K: \left|\vec{x}-\vec{m}\right| = r \Rightarrow K: \left[\vec{x}-\vec{m}\right]^2 = r^2$$

$$K: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}\right]^2 = r^2$$

$$\Rightarrow K: (x_1-m_1)^2+(x_2-m_2)^2+(x_3-m_3)^2 = r^2$$



Grafik: Günther Gerstbrein

Beispiel

Gegeben ist die Kugel K um den Mittelpunkt $M(-2|3|-1)$ mit dem Radius r = 9 LE. Geben Sie eine Gleichung der Kugel K an und untersuchen Sie die Lage der Punkte $A(-1|1|7)$, $B(2|-4|-5)$ und $C(5|-1|4)$ in Bezug auf die Kugel K.

Lösung

$$K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right]^2 = 81 \text{ bzw. } K: (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 + 1)^2 = 81$$

Die Lage der Punkte A, B, C entscheiden ihre Abstände vom Mittelpunkt der Kugel im Vergleich zum Kugelradius.

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+4+64} = \sqrt{69} \approx 8{,}31 < r = 9 \Rightarrow \text{ A innerhalb von K}$$

$$\left|\overrightarrow{BM}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+49+16} = \sqrt{81} = 9 = r \Rightarrow \text{ B auf K}$$

$$\left|\overrightarrow{CM}\right| = \left|\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{49+16+25} = \sqrt{90} \approx 9{,}49 > 9 = r \Rightarrow \text{ C außerhalb von K}$$

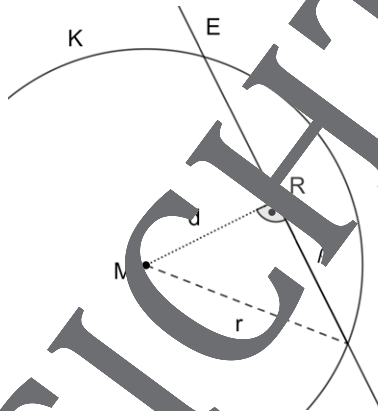
Aufgaben

1. Die Kugel K enthält die Strecke [AB] mit $A(3|-2|7)$ und $B(-1|2|5)$ als Durchmesser. Bestimmen Sie eine Gleichung der Kugel K.
2. Eine Kugel K hat den Mittelpunkt $M(-7|-4|4)$ und verläuft durch den Ursprung O. Charakterisieren Sie alle Punkte, die im Inneren der Kugelfläche liegen.

Ebenengleichung in Normalenform

Entscheidend ist der Abstand d des Mittelpunktes M der Kugel K von der Ebene E. Der Abstand d wird mithilfe der Hesse-Form E_H von E berechnet. Es gilt:

- d < r: Die Ebene E schneidet die Kugel K in einem Kreis k. Der Mittelpunkt R des Schnittkreises lässt sich ermitteln, indem man das Lot auf die Ebene E fällt. Der Radius des Schnittkreises ergibt sich mithilfe des Satzes des Pythagoras (vgl. nebenstehende Abbildung).
- d = r: Die Ebene E berührt die Kugel in einem Punkt B (d. h. die Ebene E ist Tangentialebene an die Kugel K)
- d > r: Die Ebene E läuft an der Kugel K vorbei.



Grafik: Günter Gerst[illegible]in

Beispiele

1. Zeigen Sie, dass die Ebene $E: 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 10 = 0$ die Kugel $K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^2 = 25$ schneidet. Bestimmen Sie den Radius ρ des Schnittkreises k.

2. Weisen Sie nach, dass die Ebene $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3 = 0$ die Kugel $K: \vec{x}^2 = 1$ berührt und geben Sie die Koordinaten des Berührpunktes B an.

Lösung

1. $E_H: \frac{1}{7}(2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 10) = 0$

$$d_{ME} = \left|\frac{1}{7}(-6 + 3 + 6 - 10)\right| = 1 < 5 = r \Rightarrow \text{Schnitt}$$

$$\rho^2 = r^2 - d^2 = 25 - 1 = 24 \Rightarrow \rho = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \approx 4{,}90 \text{ LE}$$

2. $E_H: \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 + 2x^3 - 3) = 0 \Rightarrow d_{ME} = \left|\frac{1}{3}(-3)\right| = 1 = r \Rightarrow \text{Berührung}$

Die Lotgerade ℓ zur Ebene E durch den Mittelpunkt M schneidet die Ebene E im Berührpunkt B.

$$\ell: \vec{x} = \rho \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ in } E: \rho + 4\rho + 4\rho - 3 = 0 \Rightarrow 9\rho = 3 \Rightarrow \rho = \frac{1}{3} \Rightarrow B\left(\frac{1}{3} \,\middle|\, \frac{2}{3} \,\middle|\, \frac{2}{3}\right)$$