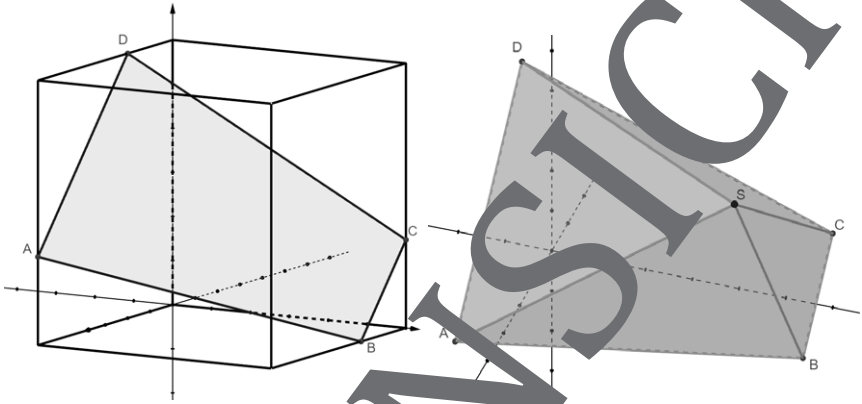


Würfel, Trapez und Pyramide

Günther Weber



© Günther Weber

Vier von einem Parameter abhängige Punkte liegen auf den Kanten eines Würfels und bilden ein ebenes Viereck. Ihre Schüler:innen und Schüler untersuchen abhängig vom Parameter dieses Viereck, eine Erweiterung oder einen Teil des Vierecks hinsichtlich der Form (Rechteck, Dreieck, gleichseitiges Dreieck) oder des Flächeninhalts. Die Vierecksfläche bildet die Grundfläche und ein weiterer Punkt die Spitze einer Pyramide. Die Lernenden untersuchen die Lage des Spitzpunktes, wenn die Spitze in die Grundflächenebene projiziert wird oder wenn eine Mantelfläche so um eine Grundkante geklappt wird, dass die Spitze in die Grundflächenebene fällt.

Würfel, Trapez und Pyramide

Oberstufe (weiterführend)

Günther Weber

Hinweise	1
Aufgaben	3
Lösungen	5

Die Schülerinnen und Schüler lernen

ihre bereits erworbenen Fähigkeiten in der analytischen Geometrie im räumlichen Koordinatensystem sicher anzuwenden. Dabei müssen sie Parameter so bestimmen, dass Drei- und Vierecke sowie Pyramiden gewünschte Eigenschaften besitzen. Bei der Pyramide wird zudem die Spitze in der Grundflächenebene der Pyramide projiziert oder die Mantelfläche so geklappt, dass die Pyramidenspitze in der Grundflächenebene liegt.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

Ab Arbeitsblatt



einfaches Niveau



mittleres Niveau



schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Aufgaben	M1	AB

Kompetenzprofil:

Inhalt: Würfel, Punkteschar, Parameterbestimmung, Flächeninhalt von Trapez und Drachen, Eigenschaften von Trapez, Rechteck, Dreieck und Pyramide, Lotgerade, Länge von Strecken, Winkel, Mittelpunkte einer Strecke, Symmetrieebene, Projektion eines Punktes in eine Ebene, Klappung einer Fläche

Medien: GTR/CAS, Geogebra

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit Symbolen, Zeichen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Die Lernenden sollten die Flächeninhaltsformel von Trapez und Drachen sowie die Volumenformel für Pyramiden kennen und mit den Methoden der Analytischen Geometrie Abstandsberechnungen durchführen können. Ebenso kennen sie die Eigenschaften von Trapez, Rechteck und Dreieck. Im Aufstellen von Geraden- und Ebenengleichungen sowie im Bestimmen der Schnittpunkte von Geraden bzw. Gerade und Ebenen sind die Jugendlichen geübt. Sie kennen die Projektion eines Punktes in eine Ebene und können die Ortsvektoren von Punkten mit Einheitsrichtungsvektoren aufstellen.

Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan

https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrpläne/lehrplan/47/Kernlernplan_GOST_Mathematik.pdf

(aufgerufen am 15.11.2023)

finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler ...

- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar,
- berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen,
- deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es,
- untersuchen mithilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung),
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen.

Die Lernenden veranschaulichen Sachverhalte und kontrollieren Ergebnisse auch mit digitalen Werkzeugen (z. B. GeoGebra).

Methodisch-didaktische Anmerkungen:

Leistungsschwächere Schüler und Schülerinnen berechnen die Aufgabenstellungen der Aufgabenteile **2a), d), e) und f)** mit dem Trapez aus Aufgabenteil **1b)** ($k = 1$) und weisen dann den allgemeinen Fall für ein beliebiges k mithilfe von GeoGebra nach.

Bei den Aufgabenteilen **2f), g) und 2h)** kann mithilfe von GeoGebra veranschaulicht werden, welche Grundseite des Trapezes, abhängig vom Parameter, mit einem weiteren Punkt das zu betrachtende Dreieck bildet. Sie können dann die Aufgabe arbeitsteilig von zwei Gruppen bearbeiten lassen. Vor der Bearbeitung wiederholen die Lernenden auch noch einmal das Auflösen von Brüchen mit Variablen.

Bei Aufgabenteil **3a)** klären Sie am besten vorher, welche Bedingungen bei einer Pyramide vorliegen muss, damit sie immer das gleiche Volumen hat. Bei Aufgabenteil **3e)** wiederholen die Jugendlichen vor dem Bearbeiten, wann ein Punkt in einem Dreieck liegt. Bei Aufgabenteil **3f)** können Sie die Klappung einer Mantelfläche der Pyramide mithilfe eines dreieckigen Blattes Papier veranschaulichen. Arbeiten Sie Klappung um die Kante \overline{AB} und die Kante \overline{CD} arbeitsteilig durch zwei Gruppen.

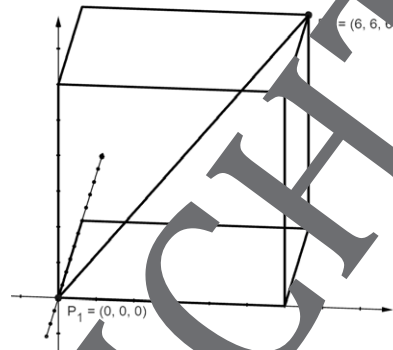
Aufgaben

1. Die Raumdiagonale eines Würfels hat die Eckpunkte $P_1(0|0|0)$ und $P_7(6|6|6)$ (siehe Abbildung).

- a) Bestimmen Sie die Koordinaten der anderen Eckpunkte des Würfels.
 b) Auf den Kanten des Würfels liegen die Punktescharen $A(6|0|k+1)$, $B(k+1|6|0)$, $C(0|6|k+1)$ und $D(k+1|0|6)$ mit $k \in [0;4]$.

Zeichnen Sie das Viereck ABCD für $k=1$ in den Würfel ein.

Anmerkung: Im Folgenden wird nur noch von Punkten und nicht mehr von Punktescharen gesprochen.



Grafik: Gunnar Weber

- 2.
- a) Zeigen Sie, dass das Viereck für ein beliebiges k ein gleichschenkliges Trapez ist.
 b) Überprüfen Sie rechnerisch, ob der Flächeninhalt des Trapezes unabhängig von k ist.
 c) Bestimmen Sie k so, dass das Trapez ein Rechteck ist.
 d) Bestimmen Sie eine Symmetrieebene senkrecht zur Fläche des Trapezes in Koordinatenform.
 e) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S_D der Diagonalen des Trapezes und zeigen Sie, dass das Dreieck $S_D B_5 C$ für ein beliebiges k gleichseitig sind.
 f) Die Verlängerungen der Schenkel des Trapezes schneiden sich in einen Punkt S_g . Der Punkt S_g und die Punkte der kürzeren Grundseite des Trapezes bilden ein Dreieck. Überprüfen Sie, ob es ein k gibt, sodass das Dreieck gleichseitig wird.
 g) Bestimmen Sie k so, dass das aus der Grundseite des Trapezes und dem Punkt S_g bestehende Dreieck und das Trapez den gleichen Flächeninhalt haben.
 h) Zwei Eckpunkte auf einer der beiden Grundseiten des Trapezes bilden zusammen mit den Punkten S_D und S_g einen Drachen. Bestimmen Sie k so, dass der Flächeninhalt des Drachen 10 FE ist.

Sie wollen mehr für Ihr Fach? Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download im RAABE Webshop.



Über 5.000 Unterrichtseinheiten
sofort zum Download verfügbar



Webinare und Videos
für Ihre fachliche und
persönliche Weiterbildung



Attraktive Vergünstigungen
für Referendar:innen mit
bis zu 15% Rabatt



Käuferschutz
mit Trusted Shops



Jetzt entdecken:
www.raabe.de