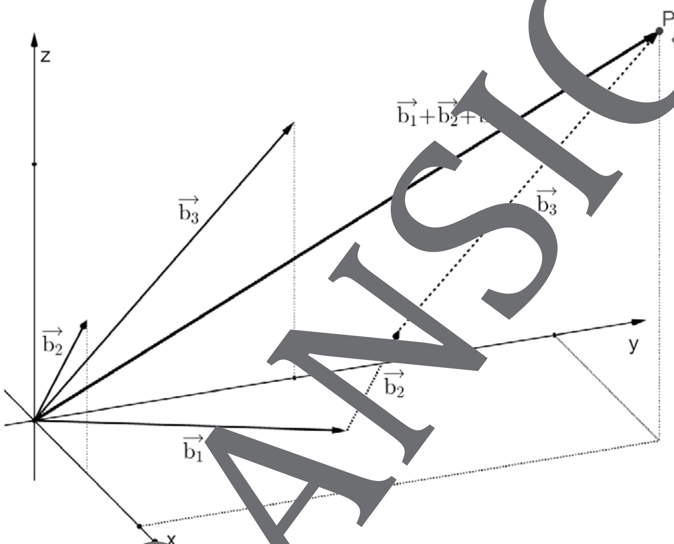
# Rechnen mit Vektoren: Vektorraum, Basis und Linearkombinationen

Alfred Müller




*Grafik: Günter Gerstbrein*

Ein kurzer Überblick führt die Schülerinnen und Schüler an das Thema Vektorräume heran. Dabei lernen sie grundlegende Konzepte wie Linearkombinationen, lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit oder die Idee einer Basis kennen.

Dieses Wissen wenden die Lernenden anschließend im Rahmen einiger Übungsblätter an: Sie prüfen, ob eine Menge an Vektoren eine Basis darstellt, kontrollieren die lineare Unabhängigkeit und führen Basiswechsel durch. Auch andere Aufgaben, die aber ebenfalls einen Bezug zu Vektoren haben und sich mit Punkten, Geraden und Ebenen beschäftigen, sind Teil dieser Sammlung.



RAABE, KLASSE SCHULE

# Rechnen mit Vektoren: Vektorraum, Basis und Linearkombinationen

Oberstufe (vertiefend)

Alfred Müller





## Die Schülerinnen und Schüler lernen:

mit Vektorräumen zu arbeiten. Sie identifizieren die Basis eines Vektorraums, prüfen lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit und führen Basiswechsel durch. Ferner lösen sie Aufgaben, die sich mit Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Koordinatenraum beschäftigen.

**Überblick:**

Legende der Abkürzungen:

**AB** Arbeitsblatt **Info** Informationsblätter

| Thema | Material | Methode |
|---|---|---|
| Der Begriff des Vektorraums | M1 | Info |
| Linearkombination, Basis, Basiswechsel | M2 | Info |
| Aufgaben: Vektoren, Basis, Basiswechsel | M[illegible] | AB |
| Aufgaben: Lineare Abhängigkeit, Ebenen, Schnittgerade | M4 | AB |
| Aufgaben: Basiswechsel, Untervektorraum, Geraden | M[illegible] | AB |

## Kompetenzprofil:

**Inhalt:** Vektorraum, Basis, lineare (Un-)Abhängigkeit, Basiswechsel, Koordinatenraum, Determinante, Cramersche Regel, Regel von Sarrus, Punkte, Geraden, Ebenen

**Kompetenzen:** Mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

## Der Begriff des Vektorraums M1

Ein **Vektorraum** V über $\mathbb{R}$ ist eine Menge, für die folgende Operationen definiert sind:
**Vektoraddition:** Für zwei beliebige Elemente $\vec{v},\vec{w} \in V$ gilt, dass $\vec{v}+\vec{w}=\vec{u}$ wieder ein Element des Vektorraums V ist.
**Skalarmultiplikation:** Für jedes $\vec{v} \in V$ und jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ gilt: $a \cdot \vec{v} = \vec{w} \in V$

Zusätzlich müssen für alle Vektoren $\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V$ und Skalare $a,b \in \mathbb{R}$ folgende **Axiome** erfüllt sein:

Bezüglich der Vektoraddition:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Kommutativgesetz | $\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$ |
| 2. | Assoziativgesetz | $\left(\vec{v}+\vec{w}\right)+\vec{u}=\vec{v}+\left(\vec{w}+\vec{u}\right)$ |
| 3. | Es gibt ein Nullelement $\vec{0} \in V$ | $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$ |
| 4. | Für jedes $\vec{v} \in V$ gibt es ein entgegengesetztes (inverses) Element $-\vec{v} \in V$ | $\vec{v}+\left(-\vec{v}\right)=\vec{0}$ |

Bezüglich der Skalarmultiplikation:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Assoziativgesetz | $\left(a \cdot b\right) \cdot \vec{v} = a \cdot \left(b \cdot \vec{v}\right)$ |
| 2. | Distributivgesetz: Summe von Skalaren mit einem Vektor | $\left(a+b\right) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$ |
| 3. | Distributivgesetz: Skalar mit Summe von Vektoren | $a \cdot \left(\vec{v}+\vec{w}\right) = a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}$ |
| 4. | Es gibt ein Einselement $1 \in \mathbb{R}$ | $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ |

**Beispiel:** Beim zwei- bzw. dreidimensionalen Koordinatenraum $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ handelt es sich um Vektorräume über $\mathbb{R}$.
**Anmerkung:** Für beliebige Vektorräume kann jeder mathematische Körper K an die Stelle von $\mathbb{R}$ treten, doch im Rahmen dieses Materials beschränken wir uns auf $\mathbb{R}$.

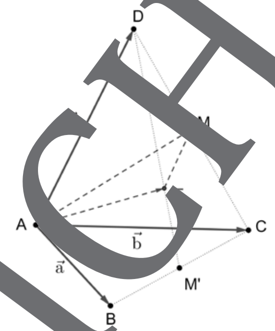
## Aufgaben: Vektoren, Basis, Basiswechsel **M3**

1. In der nebenstehenden Skizze gilt:
   $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}, \overrightarrow{AD}=\vec{c}$

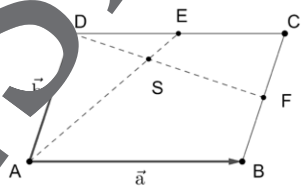
   M ist der Mittelpunkt der Strecke [CD]
   M‘ ist der Mittelpunkt der Strecke [BC]

   E ist definiert durch $\overrightarrow{M'E}=\frac{1}{3}\overrightarrow{M'D}$.

   Bestimmen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EM}$ in Abhängigkeit von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$




2. Im Parallelogramm ABCD mit $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ und $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ sind E der Mittelpunkt der Strecke [DC], F der Mittelpunkt der Strecke [BC] und S der Schnittpunkt der Transversalen AE und FD.
   a) Bestimmen Sie in Abhängig[illegible] die Vektoren $\overrightarrow{AE}$ und $\overrightarrow{FD}$.
   b) Berechnen Sie die Teilverhältnisse, [illegible] denen der Punkt S die Streck[illegible] [AE] und [FD] te[illegible]




*Grafiken: Günter Gerstbrein*

3. In einem Vektorraum $V=\mathbb{R}^3$ mit der Basis $B_0=\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ sind die Vektoren

   $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$ gegeben.

   a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ selbst eine Basis B des Raumes $\mathbb{R}^3$ bilden.

   Bestimmen Sie für den Vektor $\vec{d}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ eine Darstellung $\overrightarrow{d_B}$ bezüglich der Basis $B=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ mithilfe der Cramerschen Regel.

   b) Ein Vektor $\vec{f}$ hat bezüglich der Basis B die Darstellung $\vec{f}_B=\begin{pmatrix}-3\\2\\-2\end{pmatrix}_B$. Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{f}$ bezüglich der Basis $B_0$.