

# Eine schiefe Pyramide

Dr. Wilfried Zappe



© Dr. Wilfried Zappe

Eine schiefe Pyramide ist ein recht einfach erscheinender Körper, der aber dennoch eine Vielzahl an Möglichkeiten bietet, Kenntnisse und Fertigkeiten vorwiegend aus der Analytischen Geometrie anzuwenden. Auch Ausflüge in die Analysis und in die Kombinatorik sind gegeben.

Die vielfältigen Aufgabenstellungen bieten gute Herausforderungen, etwa in der Prüfungsvorbereitung, die Lernenden an die Bearbeitung komplexer Aufgaben heranzuführen bzw. diese üben zu lassen.

# Eine schiefe Pyramide

## Oberstufe (vertiefend)

Dr. Wilfried Zappe

Hinweise	1
M1 Konstruktion der Pyramide	3
M2 Analyse der Pyramide	5
M3 Lernerfolgskontrolle	6
Lösungen	7

### Die Schüler und Schülerinnen lernen:

ihre Kenntnisse aus der ebenen und räumlichen analytischen Geometrie, der Analysis und der Kombinatorik auf komplexen Aufgabenstellungen anzuwenden, wie sie z. B. in Abituraufgaben üblich sind.

VORANSICHT

## Hinweise

### Lernvoraussetzungen:

Die Lernenden können

- mit den Methoden der Analytischen Geometrie Abstandsberechnungen und Winkelberechnungen durchführen,
- Flächeninhalte von Dreiecken bzw. Rechtecken und das Volumen einer Pyramide berechnen,
- die Rechtwinkligkeit von Strecken mit dem Skalarprodukt bestimmen,
- Dreiecke auf Kongruenz und Ähnlichkeit untersuchen
- Körpernetze zeichnen,
- lokale und globale Extrema bestimmen,
- Geraden- und Ebenengleichungen ermitteln,
- lineare Gleichungssysteme lösen,
- kombinatorische Anzahlbestimmungen durchführen.

### Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan

[https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP\\_GoSt\\_Mathematik.pdf](https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GoSt_Mathematik.pdf) (aufgerufen am 08.08.2023)

finden sich unter anderem folgende Kompetenzanforderungen:

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar,
- berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen,
- deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es,
- untersuchen mithilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Kollinearität, Winkel- und Längenberechnung),
- stellen Ebenen in Normalenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum,
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebene.

Optional

Die Schülerinnen und Schüler

- berechnen den Flächeninhalt von Dreiecken mithilfe des Vektorprodukts,
- berechnen das Volumen einer Dreieckspyramide mithilfe des Spatprodukts.

### Methodisch-didaktische Anmerkungen:

Es hängt sehr davon ab, welche Erfahrungen die Schülerinnen und Schüler beim Lösen von komplexen Aufgaben bisher gewonnen haben.

Sind bereits hinreichend viele ähnliche Aufgabenstellungen bearbeitet worden, können die Lernenden relativ selbstständig arbeiten und die Ergebnisse dann im Forum präsentieren.

Steht die Klasse am Anfang der Prüfungsvorbereitung, wäre zunächst eine „Ideenfindungskonferenz“ angebracht. Im Unterrichtsgespräch werden Lösungsansätze diskutiert. Die Teilnehmer notieren stichpunktartig die Lösungsideen, und setzen sie dann weitgehend selbstständig um.

Die Aufgaben sind so angelegt, dass sie auch mit einem wissenschaftlich-technischen Taschenrechner und ohne CAS bearbeitet werden können.

Die Schülerinnen und Schüler können sich Körpernetze über ein Legespiel erschließen, dann auch ein zusammenhängendes, maßstabgerechtes Körpernetz mit Klebefalzen anfertigen und die Pyramide als 3D-Objekt zusammenkleben. Das gibt nicht nur Aufschluss darüber, ob das Körpernetz als solches tauglich ist, sondern fördert auch das im Gymnasium oft zu kurz kommende handwerkliche Geschick.

### Bewertungsmaßstab für die Lernerkontrollen

Note	1+	1	1-	2+	2	2-	3+	3	3-	4+	4	4-	5+	5	5-	6
VP	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
BE	30	28	27	25	24	22	20	18	17	15	13	12	10	8	7	0
		29		26	24		21	19		16	14		11	9		6

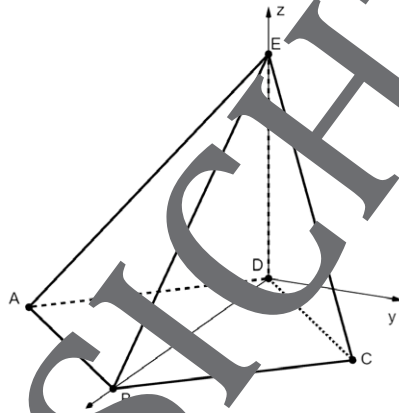
## Konstruktion der Pyramide

M1

### 1. Grund- und Seitenflächen

Das Schrägbild zeigt eine Pyramide ABCDE mit  $A(3|-3|0)$ ,  $B(6|0|0)$ ,  $C(3|3|0)$ ,  $D(0|0|0)$  und  $E(0|0|4)$  (Einheit cm)

- Weisen Sie nach, dass die Grundfläche ABCD ein Quadrat ist.
- Begründen Sie, dass die Dreiecke ADE und CDE sowie die Dreiecke ABE und BCE jeweils kongruent zueinander und rechtwinklig sind.
- Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Flächeninhalt des Dreiecks ABE größer ist als der Flächeninhalt des Dreiecks CDE.



Grafik: Gunter Gerstbrin

### 2. Volumen und Oberfläche

Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche und das Volumen des Körpers ABCDE.

### 3. Körpernetze

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die schiefe Pyramide ABCDE ein Körpernetz zu zeichnen. Auf der nächsten Seite finden Sie eine Vorlage für ein Legespiel mit allen Seitenflächen der Pyramide. Schneiden Sie die Seitenflächen aus und probieren Sie, mit ihnen verschiedene Körpernetze zu legen. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen Ihrer Banknachbarin oder Ihres Banknachbarn.

Wählen Sie ein Ihrer Ideen und zeichnen Sie auf etwas kräftigerem Papier ein maßstabgerechtes, zusammenhängendes Körpernetz der Pyramide ABCDE. Fügen Sie Klebeflächen hinzu und montieren Sie damit ein räumliches Modell der Pyramide.

### 4. Färbung von Seitenflächen

Die Seitenflächen und die Grundfläche der Pyramide ABCDE sollen mit jeweils genau einer Farbe eingefärbt werden. Zueinander kongruente Seitenflächen sollen dabei in und dieselbe Farbe erhalten. Geben Sie an, auf wie viele verschiedene Weisen das möglich ist, wenn

- genau drei Farben,
- genau fünf Farben zur Verfügung stehen.

# Sie wollen mehr für Ihr Fach? Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download im RAABE Webshop.



**Über 5.000 Unterrichtseinheiten**  
sofort zum Download verfügbar



**Webinare und Videos**  
für Ihre fachliche und  
persönliche Weiterbildung



**Attraktive Vergünstigungen**  
für Referendar:innen mit  
bis zu 15% Rabatt



**Käuferschutz**  
mit Trusted Shops



Jetzt entdecken:  
**www.raabe.de**