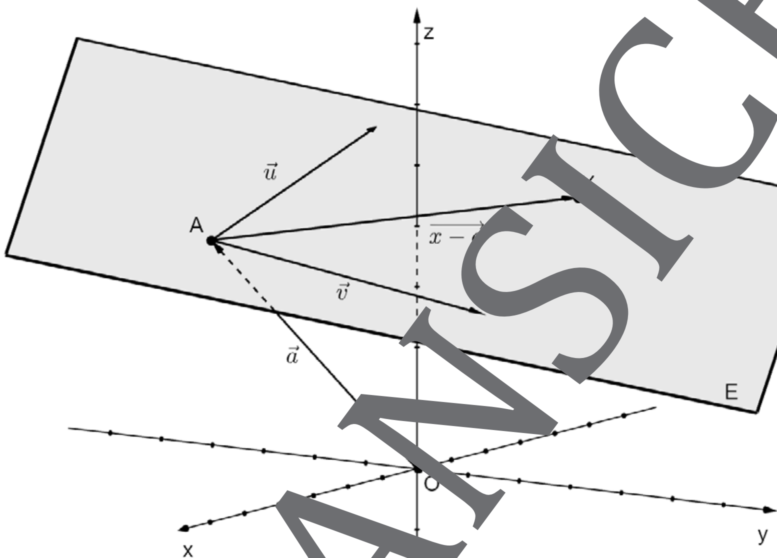
Die verschiedenen Formen der Ebenengleichung

Alfred Müller



Grafik: Günter Gerstbrein

Ebenen lassen sich auf verschiedene Arten darstellen. Zunächst lernen die Schülerinnen und Schüler die Koordinatenform und die Parameterform der Ebenengleichung kennen und versuchen sich an Übungsaufgaben zu diesen Darstellungsvarianten. Danach befassen sie sich mit der allgemeinen Normalenform sowie der Hesse-Form. Dabei werden auch Anwendungsmöglichkeiten für Abstandsberechnungen und geometrische Ortsaufgaben präsentiert. An einer Reihe von Übungsbeispielen erproben und festigen die Jugendlichen schließlich das Erlernte.

RAABE, KLASSE SCHULE

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

I Info **AB** Arbeitsblatt **BA** Bildanalyse

Thema	Material	Methode
Ebenengleichung in Parameterform	M1	I, BA
Aufgaben: Ebenengleichung in Parameterform	M2	AB
Ebenengleichung in Koordinatenform	M3	I, BA
Aufgaben: Ebenengleichung in Koordinatenform	M4	AB
Die Hesse-(Normalen-)Form der Ebenengleichung	M5	I
Aufgaben: Normalenform der Ebenengleichung	M6	AB
Anwendungen der Hesse-Form	M7	I, BA
Aufgaben: Anwendungen der Hesse-Form	M8	AB
Weitere Aufgaben	M9	AB

Kompetenzprofil:

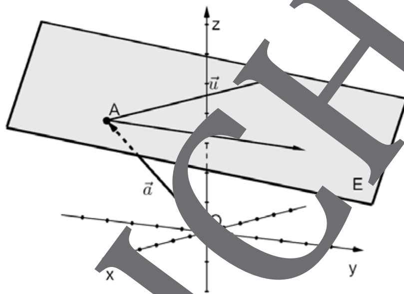
Inhalt: Ebenengleichung, Hessesche Normalenform, Parameterform, Punkte, Schnittpunkte, Geraden, Schnittgeraden, Vektoren, Parallelität, lineare Unabhängigkeit

Medien: GTR/CAS

Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Ebenengleichungen in Parameterform **M1**

Punkt-Richtungs-Gleichung



Man wählt einen Punkt A, den Antragspunkt, und zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Trägt man an A alle Linearkombinationen $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ an, so entsteht eine Ebene E, deren Punkte durch die Punkt-Richtungs-Gleichung dargestellt werden:

$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Da die Ebenengleichung die beiden Parameter λ und μ enthält, nennt man diese auch Ebenengleichung in **Parameterform**.

In der Koordinatenschreibweise erhält man:

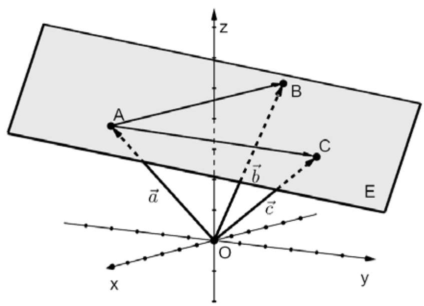
$x_1 = a_1 + \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot u_1$

$x_2 = a_2 + \lambda \cdot u_2 + \mu \cdot u_2$

$x_3 = a_3 + \lambda \cdot u_3 + \mu \cdot u_3$

Wichtiger Hinweis:
Zum Aufstellen einer Ebenengleichung benötigt man einen Antragspunkt und zwei linear unabhängige Richtungsvektoren.

Ebenengleichung durch drei Punkte



Grafik: Günter Gerstbrein

Eine Ebene E ist eindeutig festgelegt durch drei Punkte A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen. Wählt man z. B. den Antragspunkt A und $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ als linear unabhängige Richtungen, dann erhält man die Drei-Punkte-Gleichung der Ebene E mit:

$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC}$

$\quad = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + \mu \cdot (\vec{c} - \vec{a}),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Anmerkung:
Jeder der drei Punkte A, B oder C kann als Antragspunkt gewählt werden, ebenso können je zwei linearunabhängige Vektoren aus den sechs Richtungen $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ ausgewählt werden.

Beispiel:
Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E durch die Punkte $A(1|2|3)$, $B(6|2|-7)$, $C(3|3|1)$.

Lösung:

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right) + \mu \cdot \left(\vec{c} - \vec{a}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

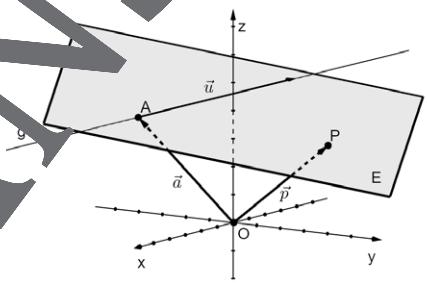
oder:

$$E: \vec{x} = \vec{c} + \sigma \cdot \overrightarrow{AB} + \tau \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

oder …

Ebene durch Gerade und Punkt

Eine Ebene E ist eindeutig festgelegt durch eine Gerade $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$ und einen Punkt P, der nicht auf der Geraden g liegt. Da man zum Aufstellen der Ebene E einen Punkt und zwei linear unabhängige Richtungen braucht, nimmt man z. B. den Punkt $A \in g$ und die Richtung $\vec{u} = \vec{u}_g$ sowie die Richtung $\vec{v} = \overrightarrow{AP}$.



Grafiken: Günter Gerstbrein

Man erhält:

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \left(\vec{p} - \vec{a}\right), \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Beispiel:
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, die durch die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und den Punkt $P(3|4|-7)$ aufgespannt, wird, in Parameterform.

Lösung:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Aufgaben: Ebenengleichungen in Parameterform **M2**

1. Zeigen Sie, dass die drei Punkte $A(5|1|0), B(0|-3|3), C(4|1|1)$ eindeutig eine Ebene E bestimmen und geben Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameterform an.

2. Warum bestimmen die Gerade g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-2\\-6\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix}$ und der Punkt P([illegible]|0|−[illegible]) genau eine Ebene E? Geben Sie eine Gleichung von E in Parameterform an.

3. Für welchen Wert von a schneiden sich die folgenden Geraden in genau einem Punkt S?
   $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\7\\6\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-1\\a\\-2\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\3\\4\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$
   Geben Sie dann mit diesem Wert für a die Gleichung einer Ebene E in Parameterform an, die von den Geraden g und h aufgespannt wird.

4. Zeigen Sie, dass die Geraden $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}[illegible]\\1\\1\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}[illegible]\\0\\1\end{pmatrix}+\rho\cdot\begin{pmatrix}-4\\-2\\-2\end{pmatrix}$ echt parallel sind und damit eindeutig eine Ebene E aufspannen. Geben Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameterform an.

5. Zeigen Sie, dass die Geraden $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-2\\11\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}4\\-4\\12\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\6\end{pmatrix}$ eindeutig eine Ebene E aufspannen. Geben Sie eine Gleichung von E in Parameterform an.

6. Die Ebene E schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten $A(6|0|0)$, $B(0|-2|0)$ und $C(0|0|4)$. Geben Sie eine Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B, C in Parameterform an.

7. Zeigen Sie, dass die Geraden $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-5\\5\end{pmatrix}+\tau\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}$ eindeutig eine Ebene E aufspannen. Geben Sie eine Gleichung von E in Parameterform an.

8. Zeigen Sie: Die Gerade $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$ und der Punkt $P(3|4|2)$ spannen eindeutig eine Ebene E auf. Geben Sie eine Gleichung von E in Parameterform an.