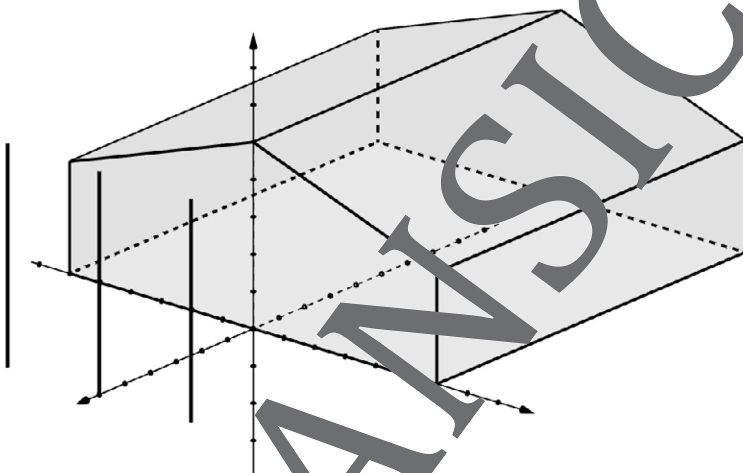
Vermischte Übungen: Haus mit Fahnenmasten geometrisch betrachtet und andere Aufgaben

Ein Beitrag von Alfred Müller



Grafik: Günter Gerstbrein

Dieser Beitrag bietet Ihnen sechs Testklausuren, mit denen Sie die Kenntnisse Ihrer Schülerinnen und Schüler aus dem Bereich der Analytischen Geometrie überprüfen können. Gleichzeitig ermöglichen die Aufgaben es den Lernenden auch, den Stoff zu wiederholen und zu festigen, aber auch ihr räumliches Vorstellungsvermögen zu trainieren.
Die Schülerinnen und Schüler konstruieren Geraden und Ebenen oder untersuchen Kugeln, Pyramiden und Prismen. Dabei berechnen sie Tangenten und Tangentialebenen, Schnittpunkte und Schnittwinkel sowie Flächen und Volumina.
Falls gewünscht, sorgen ein Beurteilungsschlüssel sowie Zeitvorgaben bei den Aufgaben für realistische Prüfungsbedingungen.

VORANSICHT

RAABE, KLASSE SCHULE

Vermischte Übungen: Haus mit Fahnenmasten geometrisch betrachtet und andere Aufgaben

Ein Beitrag von Alfred Müller

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

ihre Fähigkeiten im Bereich der analytischen Geometrie im Rahmen verschiedener Übungsaufgaben einzusetzen. Sie trainieren ihr räumliches Vorstellungsvermögen und festigen ihre Kenntnisse. In der Aufgabe „Haus mit Fahnenmasten" erkennen sie, dass sich geometrische Methoden auch für praktische Anwendungen nutzen lassen.

VORANSICHT

© RAABE 2022

Überblick

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt

● einfaches Niveau ■ mittleres Niveau ▲ schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Geraden	M1–M6	AB
Ebenen	M1–M[illegible]	AB
Winkel	M1–M4, M6	AB
Pyramide	M1, M2	AB
Trapez	M1	AB
Flächeninhalt	M1–M3, M6	AB
Volumen	M1–M3, M6	AB
Parallelogramm	M2	AB
Geradenschar	M2, M4	AB
Ebenenschar	M3, M4	AB
Prisma	M3	AB
Kugel und Tangentialebene	M4, M5	AB
Kreis	M5	AB
Mathematisch modellieren	M6	AB

© RAABE 2022

VORANSICHT

Differenzierung

Material	M1	M2	M3	M4	M5	M6
Niveau	■	●	▲	■	▲	●

Kompetenzprofil:

Inhalt: Koordinaten, Punkte, Gerade, Geradenschar, Ebene, Ebenenschar, Parameterform, Normalenform, Hesse-Form, Schnittpunkt, Schnittwinkel, Trapez, Parallelogramm, Kreis, Pyramide, Kugel, Tangentialebene, Prisma, Flächeninhalt, Volumen

Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

© RAABE 2022

VORANSICHT

Trapez, Pyramide und Ebenen **M1**

1. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1|2|-1)$, $B(5|-2|1)$, $C(5|2|1)$ und $D(3|4|0)$ gegeben.
   a) Zeigen Sie, dass die vier Punkte ein Trapez ABCD bilden. Legen Sie eine Skizze an und vervollständigen Sie diese in den folgenden Teilaufgaben. **[4 BE]**
   b) Bestimmen Sie die Längen der parallelen Seiten $[AB]$ und $[DC]$ des Trapezes sowie die Innenwinkel α und β bei A und B sowie die Fläche des Trapezes. **[7 BE]**
   c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt M der Diagonalen AC und BD sowie das Verhältnis τ, in dem der Punkt M die Strecke $[AC]$ teilt. **[4 BE]**
   d) Die Geraden AD und BC schneiden sich im Punkt T unter dem Winkel ε. Berechnen Sie die Koordinaten von T sowie den Winkel ε. **[4 BE]**
2. Ebenen E und F:
   a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform, in der das Trapez ABCD liegt. Welche besondere Lage hat die Ebene E im Koordinatensystem? **[4 BE]**
   b) Der Punkt $S(7|4|5)$ ist die Spitze einer Pyramide ABCDS. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide auf zwei verschiedene Arten sowie die Seitenfläche ABS. **[8 BE]**
   c) Die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \rho \in \mathbb{R}$ schneidet die Ebene E im Punkt R unter dem Winkel φ. Berechnen Sie die Koordinaten von R sowie die Größe des Winkels φ. **[4 BE]**
   d) Begründen Sie, dass der Punkt A und die Gerade g eine Ebene F bestimmen. Geben Sie eine Gleichung von F in Parameterform an und zeigen Sie, dass die Ebene F auch in der Form $F: 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2 = 0$ dargestellt werden kann. Geben Sie dann eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und F. **[5 BE]**

Arbeitszeit: 45 Minuten **Gesamt: [40 BE]**

© RAABE 2022

Kugel, Tangentialebene und Projektion **M5**

1. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind der Punkt $Q(6|1|4)$, die Ebene

   $E: x_1 - 2x_2 + 2x_3 - d = 0$ sowie die Kugel $K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^2 = r^2$ gegeben.

   a) Bestimmen Sie die Werte für d und r, wenn der Punkt Q auf der Ebene E liegt und die Ebene E Tangentialebene an die Kugel K ist. **[4 BE]**

   b) Zur Ebene E gibt es eine parallele Tangentialebene E_1. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_1 sowie die Berührpunkte P und P_1 der Ebenen E und E_1 mit der Kugel K. **[6 BE]**

   c) Die Gerade $g: \vec{x} = \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma \in \mathbb{R}$ schneidet die Ebene E im Punkt R und die Ebene E_1 im Punkt R_1. Welche Winkel α bzw. α_1 schließt die Gerade g mit den Ebenen E bzw. E_1 ein? Berechnen Sie dann die Länge der Strecke $[RR_1]$. **[7 BE]**

2. Lot und Teilpunkt

   a) Vom Punkt R_1 der Geraden g werde das Lot auf die Ebene E gefällt. Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes L. **[4 BE]**

   b) Welcher Punkt Z teilt die Strecke $[R_1L]$ im Verhältnis $3:1$. Welche Schnittgerade haben die Ebene E und die Ebene F, die durch die Punkte R_1, R und L gebildet wird, gemeinsam? **[6 BE]**

3. Orthogonale Projektion und geometrische Ortsaufgabe im $\mathbb{R}^2$

   a) K´ sei die orthogonale Projektion der Kugel K in die x_1x_2-Ebene. Ebenso werden die Ebenen E und E_1 in die x_1x_2-Ebene projiziert. Welche Gleichungen besitzen K´, E´ und E_1´? **[4 BE]**

   b) Es sei $A(a_1|0)$ der linke, $B(b_1|0)$ der rechte Schnittpunkt von K´ mit der x_1-Achse, $C(u_1|u_2)$ ein beliebiger Punkt und D sein Spiegelpunkt bezüglich des Ursprungs. Fertigen Sie eine Zeichnung an, die Sie fortlaufend ergänzen. Auf welcher Ortslinie OL bewegt sich der Schwerpunkt $S(v_1|v_2)$ des Dreiecks ABD, wenn der Punkt C den Kreis K´ durchläuft. Charakterisieren Sie die Ortslinie und zeichnen Sie diese ein. **[9 BE]**

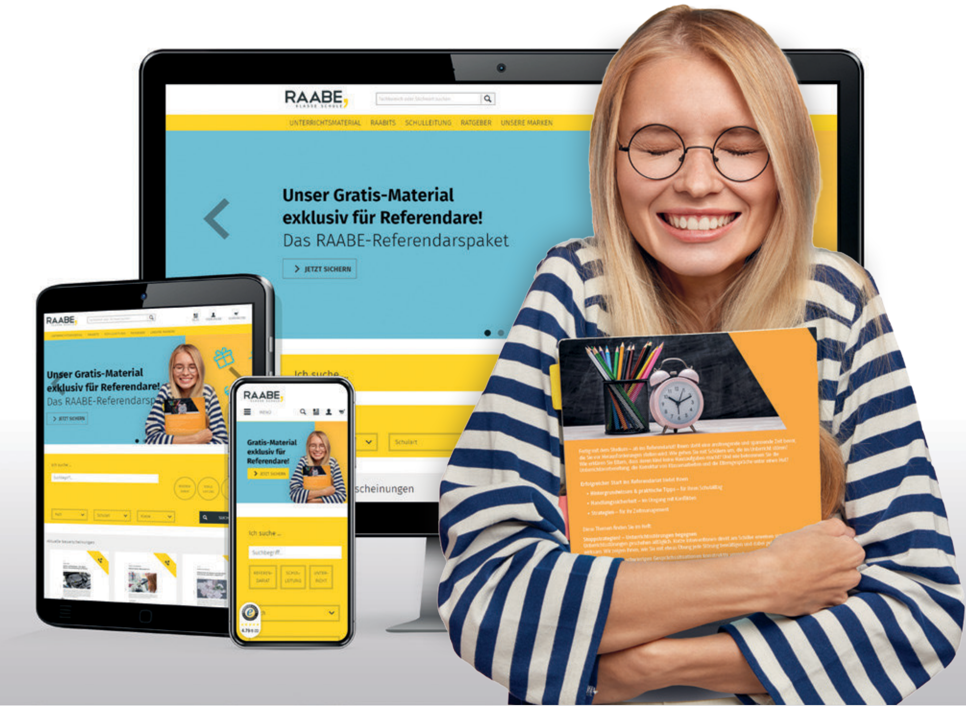
Arbeitszeit: 65 Minuten **Gesamt: [40 BE]**

© RAABE 2022

VORANSICHT

RAABE
KLASSE SCHULE

Sie wollen mehr für Ihr Fach?
Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download
im RAABE Webshop.



- **Über 5.000 Unterrichtseinheiten** sofort zum Download verfügbar
- **Webinare und Videos** für Ihre fachliche und persönliche Weiterbildung
- **Attraktive Vergünstigungen** für Referendar:innen mit bis zu 15% Rabatt
- **Käuferschutz** mit Trusted Shops

Jetzt entdecken:
www.raabe.de