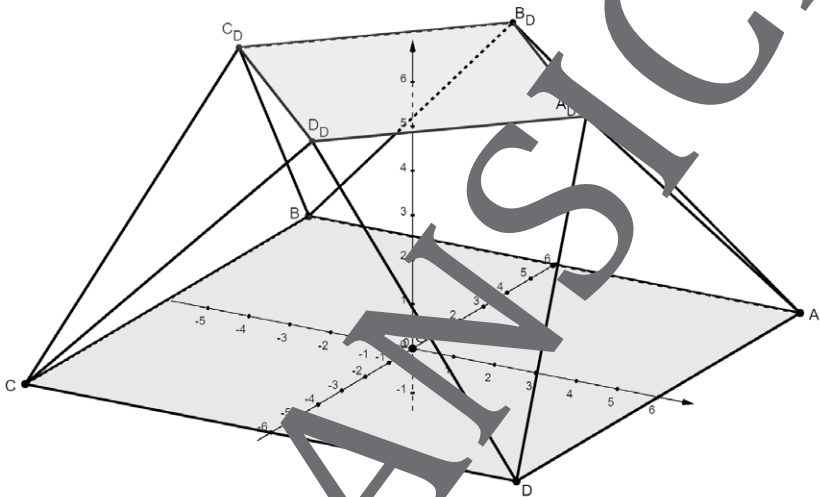


Berechnungen am „gedrehten“ Pyramidenstumpf

Ein Beitrag von Günther Weber



© Günther Weber

Bei einem „gedrehten“ Pyramidenstumpf (siehe Abbildung) bestimmen die Schülerinnen und Schüler die Eckpunkte der Schnittfläche, untersuchen den Körper auf Symmetrie, beschreiben die Mantelfläche und berechnen den Winkel zwischen der Grund- bzw. Deckfläche und den Dreiecken der Mantelfläche. Der Körper wird durch eine Ebenenschar parallel zur Grundfläche geschnitten. Abhängig vom Scharparameter bestimmen die Lernenden die Eckpunkte der Schnittfläche und untersuchen diese hinsichtlich Regelmäßigkeit und Größe. Ebenso berechnen sie das Volumen des „gedrehten“ Pyramidenstumpfes, indem sie einerseits den Körper in Teilkörper zerlegen und andererseits mit den Methoden der Analysis über die Schnittflächen integrieren. Zudem bestimmen die Lernenden den Parameter der Ebenenschar so, dass bestimmte Eigenschaften der Dreiecke der Mantelfläche erfüllt sind. Bei der Lösung der Aufgaben kann die Auswirkung unterschiedlicher Parameterwerte altersgerecht veranschaulicht werden.

Berechnungen am „gedrehten“ Pyramidenstumpf

Oberstufe (grundlegend/weiterführend)

Ein Beitrag von Günther Weber

Hinweise	1
Aufgaben	4
Lösungen	6

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

ihre bereits erworbenen Fähigkeiten in der Analytischen Geometrie im räumlichen Koordinatensystem sicher anzuwenden. Sie bestimmen die Koordinaten von Eckpunkten, berechnen die Innenwinkel und den Flächeninhalt von Dreiecken sowie den Winkel zwischen zwei Ebenen. Die Lernenden beschreiben die Schnittfläche eines „gedrehten“ Pyramidenstumpfs und berechnen den Flächeninhalt der Schnittfläche. Sie ermitteln das Volumen des Körpers, indem sie diesen in Pyramiden zerlegen bzw. indem sie mit den Methoden der Analysis über die Schnittflächen integrieren. Ebenso untersuchen die Jugendlichen, ob die Perimeter der Mantelfläche abhängig vom Parameter einer Ebenenschar gewisse Eigenschaften aufweisen.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt



einfaches Niveau



mittleres Niveau



schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Aufgaben	M	AB

Kompetenzprofil:

Inhalt: Abbildungen in der Ebene, Koordinaten im Raum, Symmetrie zu Koordinatenebenen, Geraden- und Ebenengleichungen, Winkel zwischen Ebenen, Flächeninhalt und Innenwinkel im Dreieck, Schnitt Ebenenschar mit Kugel, lineares Gleichungssystem, Volumen Pyramide, Integration über Schnittflächen, rechtwinkliges bzw. gleichseitiges Dreieck

Medien: GTR/CAS, GeoGebra

Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K3), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), Kommunizieren (K6)

Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Die Lernenden kennen die Zwei-Punkteform bzw. Punkt-Richtungsform der Geradengleichung sowie die (Hessesche-) Normal-, Koordinaten- und Parameterform der Ebenengleichung. Die Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebenenschar bereitet ihnen keine Probleme. Die Jugendlichen können mit den Methoden der Analytischen Geometrie Abstandsberechnungen und Winkelberechnungen (auch mit Parameter) durchführen sowie Flächeninhalte von Dreiecken und das Volumen von Pyramiden bestimmen. Die Schülerinnen und Schüler sind in der Lage ein lineares Gleichungssystem aufzustellen und zu lösen. Außerdem integrieren sie über Schnittflächen.

Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan des Landes Nordrhein-Westfalen

https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOST_Mathematik.pdf

(aufgerufen am 11.07.2022) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen, die der Beitrag gezielt fördert:

Die Schülerinnen und Schüler ...

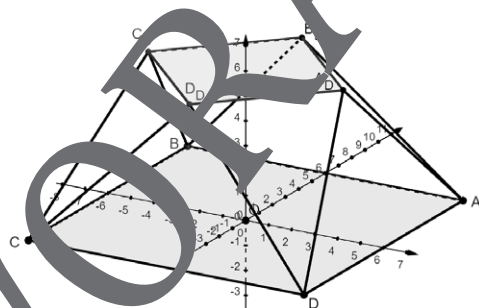
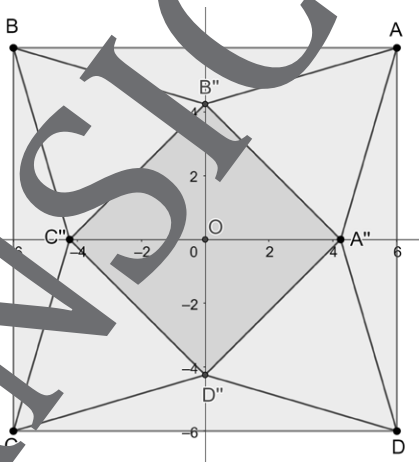
- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar
- bestimmen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen,
- deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es,
- untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung),
- stellen Ebenen in Normalenform dar,
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebene.

Die Inhaltsfelder Analysis, Analytische Geometrie sollen laut Kernlehrplan zudem nicht isoliert nebeneinander, sondern konzeptionell vernetzt z. B. durch übergreifende Konzepte wie den funktionalen Zusammenhang betrachtet werden. So spricht der Beitrag auch folgende Kompetenzen aus dem Bereich der Analysis an.

M1 Aufgaben

Eine quadratische Grundfläche eines Körpers hat die Eckpunkte $A(6|6|0)$, $B(-6|6|0)$, $C(-6|-6|0)$ und $D(6|-6|0)$.

1. Die Eckpunkte des Quadrates werden so um den Ursprung gedreht, dass der Eckpunkt A nach der Drehung auf dem positiven Teil der x-Achse liegt. Es entsteht das Quadrat $A''B''C''D''$. Das gedrehte Quadrat wird anschließend am Ursprung um den Faktor $k = \frac{1}{2}$ zentrisch gestreckt, so dass man das Quadrat $A''''B''''C''''D''''$ erhält. Die Eckpunkte des Ausgangs-Quadrates werden jeweils mit zwei Eckpunkten des zentrisch gestreckten Quadrates $A''''B''''C''''D''''$ verbunden (siehe Abbildung). Das zentrisch gestreckte Quadrat wird anschließend parallel zur xy -Ebene um 3 LE nach oben verschoben, sodass die Eckpunkte A_D , B_D , C_D und D_D erhält. Diese Punkte bilden die Eckpunkte der Deckfläche eines „gedrehten“ Pyramidenstumpfes (siehe Abbildungen).



Grafiken: Günther Weber

Sie wollen mehr für Ihr Fach?

Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download im RAABE Webshop.



Über 5.000 Unterrichtseinheiten
sofort zum Download verfügbar



Webinare und Videos
für Ihre fachliche und
persönliche Weiterbildung



Attraktive Vergünstigungen
für Referendar:innen mit
bis zu 15% Rabatt



Käuferschutz
mit Trusted Shops



Jetzt entdecken:
www.raabe.de