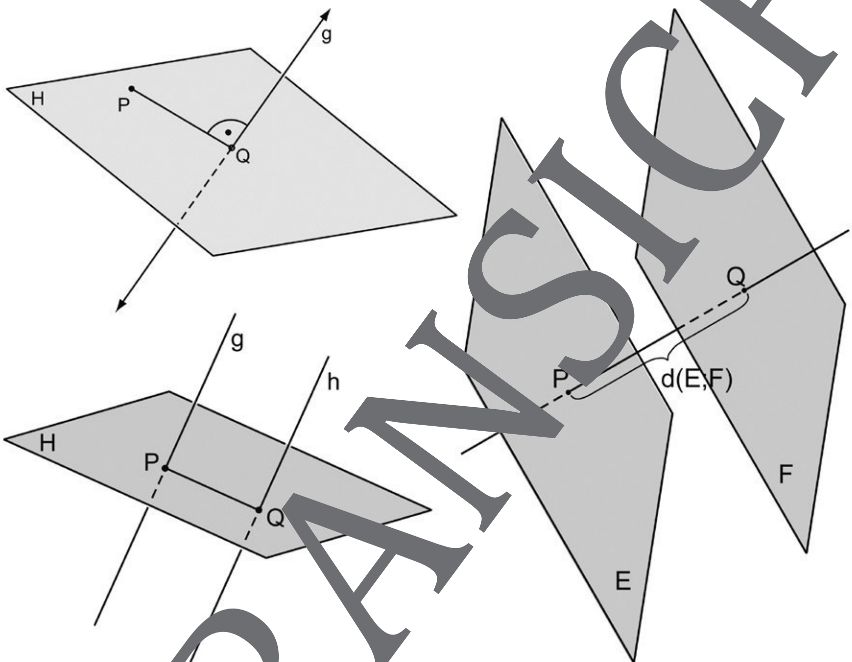
Abstandsberechnungen

von Carlo Vöst



Abstandsberechnungen von geometrischen Objekten wie Punkt, Gerade und Ebene sind immer wieder ein wichtiges Thema in der Analytischen Geometrie. Es gibt hierzu Standardverfahren, aber auch Tricks, welche die Berechnung oft sehr vereinfachen.

Abstandsberechnungen

Oberstufe (grundlegend)

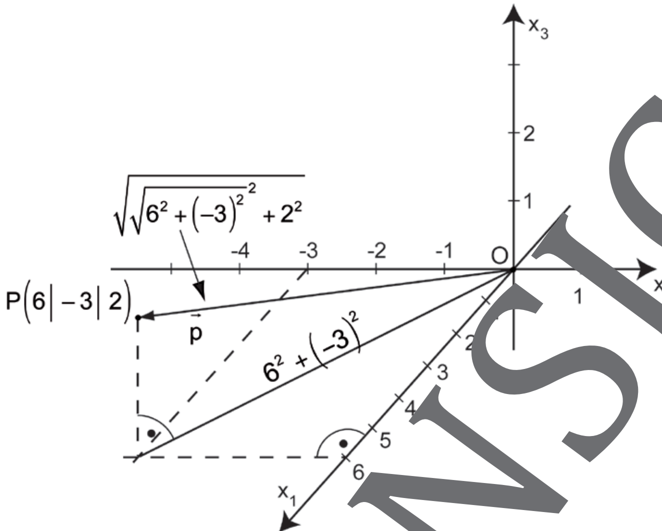
von Carlo Vöst

Die Schüler und Schülerinnen lernen:

Abstandsberechnungen in der Analytischen Geometrie durchzuführen. Der Beitrag ist für die Lernenden zum Selbststudium gedacht oder auch als Hilfe zur Vorbereitung auf eine Klassenarbeit. Es werden folgende Abstandsprobleme behandelt: Abstand Ursprung–Punkt, Abstand Punkt–Punkt, Abstand Punkt–Gerade, Abstand paralleler Geraden, Abstand Punkt–Ebene, Abstand paralleler Ebenen und Abstand windschiefer Geraden. Nach dem Theorieteil finden die Jugendlichen eine Fülle von Aufgaben zum Einüben des besprochenen Stoffs. Am Ende des Beitrags steht eine Klassenarbeit, bei der die Jugendlichen das Erlernte testen. Immer wieder wird auf die gewinnbringende Benutzung eines CAS-Rechners hingewiesen.

Theorie M1

Abstand Ursprung-Punkt



Den Abstand $|\overrightarrow{OP}|$ des Ursprungs O zu einem beliebigen Punkt P kann man, weil die Koordinatenachsen jeweils senkrecht zueinander stehen) durch doppelte Anwendung des „Pythagoras“ berechnen (siehe Abbildung).
Diesen Abstand $|\overrightarrow{OP}| = |\vec{p}| = p$ bezeichnet man auch als Betrag des (Orts-)Vektors $\vec{p}$.

Beispiel

Gesucht ist der Abstand $|\overrightarrow{OP}|$ des Punktes $P(6|-3|2)$ vom Ursprung $O(0|0|0)$.

$$|\overrightarrow{OP}| = |\vec{p}| = p = \sqrt{\sqrt{6^2+(-3)^2}^2+2^2} = \sqrt{36+9+4} = \sqrt{49} = 7$$

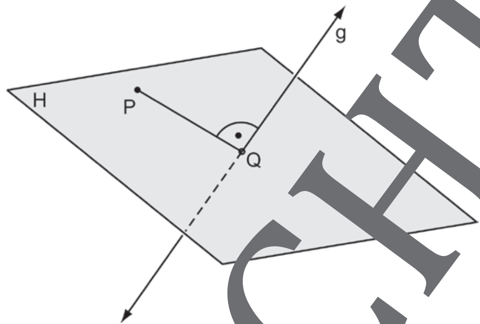
CAS-Eingabe: norm([6;−3;2])

Abstand Punkt-Gerade

Beispiel:

Gegeben:

$$P(-2|1|6);\ g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}8\\2\\-3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix};$$



entweder:

Hilfsebene H mit: $H \perp g \ \wedge\ P \in H$:

Der Richtungsvektor von g ist ein Normalenvektor der Ebene H, daher gilt:

$H:\ 2x_1 + x_2 - x_3 + C = 0$ und weil

$P(-2|1|6) \in H$ ist:

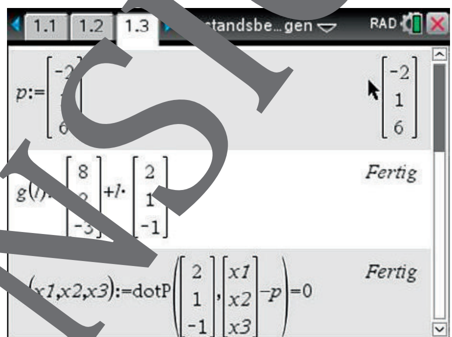
$2\cdot(-2)+1-6+C=0$

$-4-5=-C$

$C=9$

$H:\ 2x_1+x_2-x_3+9=0;$

$\{Q\}=H\cap g$:

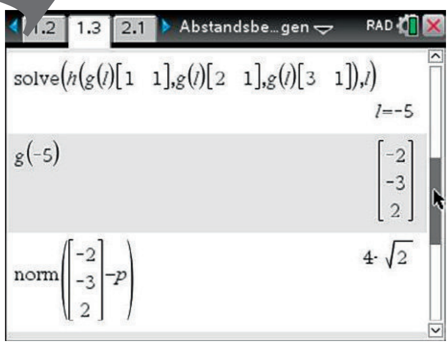


Gerade g in Ebene H einsetzen:

$2(8+2\lambda)+(2+\lambda)-(-3-\lambda)+9=0$

$\Leftrightarrow 16+4\lambda+2+\lambda+3+\lambda+9=0$

$\Leftrightarrow\ 6\lambda=-30\ \Leftrightarrow\ \lambda=-5$



in Gerade g einsetzen:

$$\vec{q}=\begin{pmatrix}8\\2\\-3\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Q(-2|-3|2)$

$d(P;g)=|\overline{PQ}|$

$=\sqrt{(-2-(-2))^2+(-3-1)^2+(2-6)^2}$

$=\sqrt{16+16}=\sqrt{16\cdot 2}=4\sqrt{2}$