Erkundungen an einem Quader

Dr. Wilfried Zappe
Illustrationen von Dr. Wilfried Zappe

© *pixdeluxe/E+/Getty Images Plus*

Elementare geometrische Körper wie Quader geben immer wieder Anlass für die Formulierung von Mathematikaufgaben unterschiedlichsten Niveaus – damals wie heute. In diesem Beitrag reisen Ihre Schülerinnen und Schüler gedanklich zurück ins Jahr 1968 und bearbeiten eine Abituraufgabe aus dieser Zeit. Wie damals üblich lösen die Lernenden die Aufgabe ohne digitale Hilfsmittel. Diese scheinbar „alte" Aufgabe wird anschließend durch verschiedene Aufgabenstellungen ergänzt, die aber mehr den heutigen Ansprüchen hinsichtlich der Kompetenzentwicklung und der Verwendung digitaler Hilfsmittel entsprechen und Gelegenheit zum differenzierten Arbeiten bieten.

RAABE, KLASSE SCHULE

Erkundungen an einem Quader

Oberstufe (grundlegend)

Dr. Wilfried Zappe
Illustrationen von Dr. Wilfried Zappe

Die Schüler lernen:

- geometrische Sachverhalte im Raum zu modellieren,
- elementare Operationen mit geometrischen Vektoren auszuführen,
- das Skalarprodukt und das Vektorprodukt anzuwenden,
- Vektoren beim Arbeiten mit geradlinig bzw. ebenflächig begrenzten geometrischen Objekten anzuwenden,
- Geraden und Ebenen analytisch zu beschreiben und die Lagebeziehungen von Geraden zu untersuchen,
- Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen zu untersuchen.

Hinweise

Als Einstieg in diese Übungen bearbeiten alle Schülerinnen und Schüler zunächst die Aufgabe **M 1**. Diese Aufgabe stammt aus dem DDR-Mathematikabitur von 1[illegible]8. Ihre Lösung verlangt elementare Kenntnisse, wie sie auch heute noch zum Grundstock jedes Lehrgangs der analytischen Geometrie gehören. Außer für die Berechnung eines Winkels mithilfe der Kosinusfunktion werden keine Hilfsmittel benötigt.

Die Übungen in den Abschnitten **M 2**, **M 3**, **M 4** und **M 5** decken weitere Felder eines heutigen Lehrganges der analytischen Geometrie ab. In vielen Fällen ist hier der Einsatz eines CAS-Rechners sinnvoll, um zu großen händischen Rechenaufwand zu vermeiden.

Lassen Sie diese Abschnitte von verschiedenen Gruppen bearbeiten und die Resultate dann in einer gemeinsamen Veranstaltung vorstellen und besprechen Sie diese. Das wäre auch im Distanzunterricht möglich, wenn die technischen Voraussetzungen dafür stimmig sind.

Die angefügten Musterlösungen sind nur teilweise ausführlich, oft auch nur mit dem CAS-Rechner beschrieben, daher sollten Sie besonders Aufgaben von schwierigem Niveau mit Ihrer Klasse nachbesprechen oder auch gemeinsam lösen.

M 1 Originalaufgabe[1]

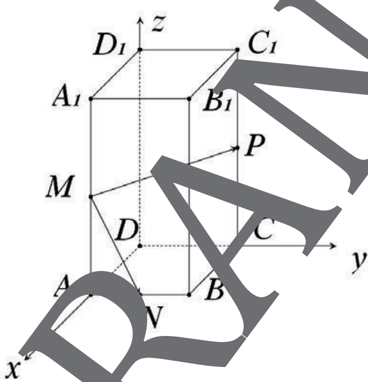
Hinweis: Lösung nur unter Verwendung eines wissenschaftlichen, **nicht CAS-fähigen** Taschenrechners.

Ein gerades Prisma (siehe Skizze!) hat die quadratische Grundfläche ABCD. Die Seite des Quadrates ist 3 cm, die Höhe des Prismas 6 cm lang. M, N und P sind die Mittelpunkte der Kanten $\overline{AB}$, $\overline{AA_1}$ bzw. $\overline{CC_1}$.

a) Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem, und geben Sie die Vektoren $\overrightarrow{MN}$ und $\overrightarrow{MP}$ in Komponentendarstellung[2] an!

b) Berechnen Sie die Größe des Winkels, der von den Vektoren $\overrightarrow{MN}$ und $\overrightarrow{MP}$ eingeschlossen wird!

c) Bestimmen Sie einen Punkt Q auf der Kante $\overline{CC_1}$ so, dass der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{MN}$ und $\overrightarrow{MQ}$ 90° beträgt!
Welchen Abstand hat der Punkt Q vom Punkt [illegible]



Grafik: Dr. W. Zapp

---

1 Pflichtaufgabe 3 aus dem DDR-Mathematikabitur von 1968

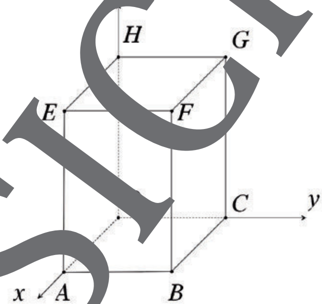
2 Komponentendarstellung: Linearkombination der Basisvektoren des Koordinatensystems

M 2 Dreiecke im Quader

Niveau				
Aufgabe	a	b	c	d

Der Quader ABCDEFGH hat eine quadratische Grundfläche ABCD mit der Seitenlänge 4 cm und eine Höhe von 6 cm (siehe Zeichnung). Der Punkt M ist Mittelpunkt der Kante $\overline{AE}$. Der Punkt N ist Mittelpunkt der Kante $\overline{AB}$.

Der Punkt P_t hat die Koordinaten $P_t(0\,|\,4\,|\,t)$ mit $0 \leq t \leq 6$.



Grafik: Dr. W. Zappe

a) Zeichnen Sie das Dreieck MNP_t für t = 0 in das Schrägbild ein. Beschreiben Sie die Lage des Punktes P_t mit Worten.

b) Berechnen Sie die Größe der Innenwinkel des Dreiecks MNP_t, wenn P_t mit dem Punkt C zusammenfällt.

c) Untersuchen Sie, ob es Werte für den Parameter t gibt, für die das Dreieck MNP_t rechtwinklig ist.

d) Weisen Sie nach, dass das Dreieck MNP_t nur für t = 3,5 gleichschenklig ist. Berechnen Sie für diesen Fall den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks MNP_t.