Stern in Ebene und Raum – Eine Metalldrahtfigur mit LED-Leuchten

Günther Weber
Illustrationen von Günther Weber

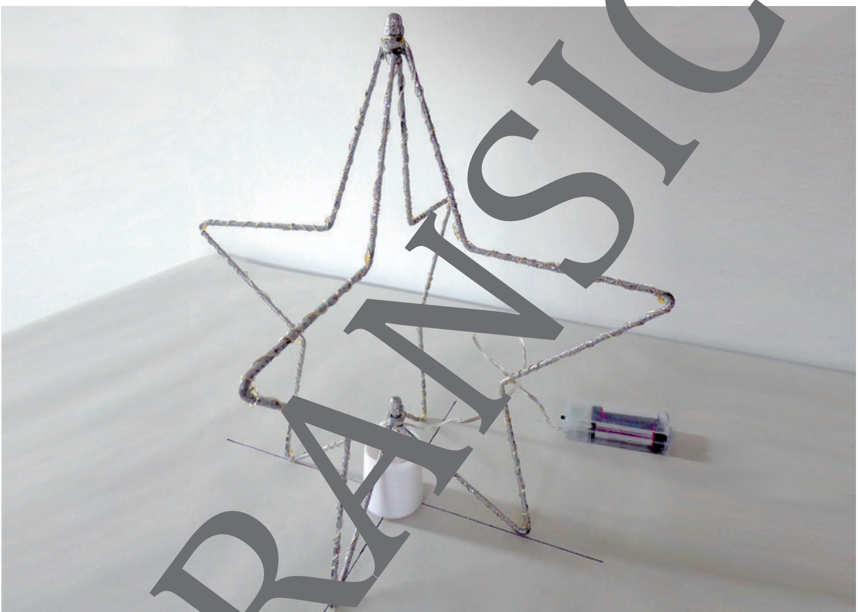


Foto: Günther Weber

Der vorliegende Beitrag betrachtet eine Weihnachtsdekoration mit den Methoden der Analysis oder der analytischen Geometrie. Ein fünfzackiger Weihnachtsstern entspricht einem Zehneck, bei dem fünf Ecken nach außen und fünf nach innen gerichtet sind. Wird mittels einer Schraubverbindung ein weiterer fünfzackiger Stern hinzugefügt, lassen sich die beiden in einem bestimmten Winkel zueinander drehen und aufstellen.
Die Schüler bestimmen die Eckpunkte der Zehnecke und übertragen sie ins räumliche Koordinatensystem. Untersucht wird weiterhin, ob eine LED-Kerze unter die stehende Figur passt und wenn ja, wie groß der Abstand des Randes der Kerze zum Stern ist.

RAABE
KLASSE SCHULE

Stern in Ebene und Raum – Eine Metalldrahtfigur mit LED-Leuchten

Oberstufe (grundlegend, weiterführend)

Günther Weber
Illustrationen von Günther Weber

Die Schüler lernen:

mithilfe der Beziehung $m = \tan(\alpha)$ zwischen der Steigung m einer Geraden und dem Schnittwinkel α der Geraden mit der x-Achse das Aufstellen der Punkt-Steigungsform bzw. der Punkt-Richtungsform einer Geradengleichung. Sie bestimmen den Schnittpunkt zweier Geraden bzw. den Schnittpunkt von Geraden und Kreis mithilfe des Einsetzungsverfahrens. Die Lernenden übertragen ebene Koordinaten in ein räumliches Koordinatensystem und überprüfen, ob eine zylinderförmige Kerze unter den Leuchtstern passt bzw. wenn dies der Fall ist, wie groß der Abstand des oberen Randes zum Stern ist.

Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Die Lernenden sollten die Beziehung $m = \tan(\alpha)$ zwischen der Steigung m einer Geraden und dem Schnittwinkel α der Geraden mit der x-Achse kennen. Sie können die Gleichung einer Geraden mit den Methoden der Analysis oder der Analytischen Geometrie aufstellen und den Schnittpunkt von Geraden bestimmen. Die Jugendlichen beherrschen das Einsetzungsverfahren beim Lösen von Gleichungssystemen. Sie kennen die Abstandsformel zur Berechnung des Abstandes zweier Punkte, den Zusammenhang der Steigungen bei senkrecht aufeinander stehenden Geraden und können die Gleichung einer Ebene senkrecht zu einer Geraden durch einen Punkt aufstellen sowie den Schnittpunkt einer Ebene mit einer Gerade bestimmen. Die Kenntnis der Kreisgleichung ist wünschenswert aber nicht zwingend erforderlich.

Lehrplanbezug:

Gegenstand des Unterrichts in Analytischer Geometrie ist es, Eigenschaften von geometrischen Körpern mithilfe von Vektoren nachzuweisen. Das Aufstellen von Geraden und Ebenengleichungen gehört ebenso zum Inhalt wie die Bestimmung von Abständen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen. In der ebenen Geometrie können die Berechnungen auch mithilfe von Funktionen durchgeführt und anschließend auf den Raum übertragen werden. Damit fördert der Beitrag insbesondere folgende Kompetenzen des Lehrplans des Landes Baden-Württemberg der Leitideen „Raum und Form“
http://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/LS/BP2016BW/ALLG/GYM/M/IK/11-12-BF/03
(aufgerufen am 09.08.2021)

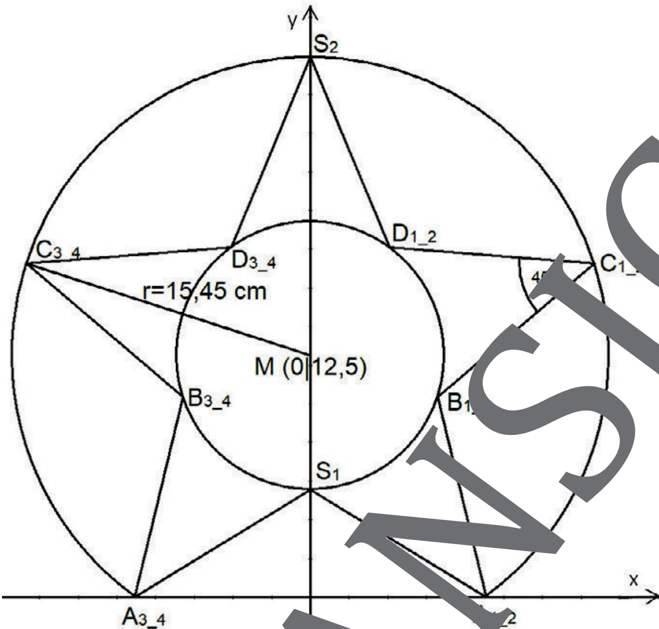
Methodisch-didaktische Anmerkungen:

Das Arbeitsblatt M1 „Grundriss des LED-Leuchtsterns mit Angaben“ sollten die Schülerinnen und Schüler zur Bestimmung der Winkel beim Aufstellen der Geradengleichung nutzen. Zudem können Sie Hilfslinien (z. B. Schenkel von Winkeln, Mittelsenkrechte oder Winkelhalbierende) einzeichnen, mit deren Hilfe sich die Eckpunkte bestimmen lassen.
Die Aufgaben 1, 3 und 4 sind sowohl mit den Methoden der Analysis als auch mit den Methoden der Analytischen Geometrie gelöst. Sie können die Lerngruppe in zwei Gruppen aufteilen, die die Aufgaben mit den unterschiedlichen Wegen lösen. Nach der Bearbeitung stellen die Lernenden ihre Lösungswege vor und diskutieren anschließend im Unterrichtsgespräch, ob es einen vorteilhafteren Lösungsweg gibt.
Zur weiteren Differenzierung variieren Sie bei Aufgabe 3 den Winkel, in dem ein Zehneck gedreht werden kann.

Differenzierung:

Aufgabe	1	2	3	4
Niveau	■	●	▲	■

M 1 Grundriss des LED-Leuchtsterns mit Angaben



Grafik: Günther Weber

M 2 Aufgaben

In der dunklen Jahreszeit, insbesondere aber in der Adventszeit, sieht man eine Vielzahl von LED-Lichterketten bzw. Metalldrahtfiguren in und an Häusern oder in Bäumen.
Eine Metalldrahtfigur, die man zum Beispiel in ein Fenster oder auf einen Tisch stellen kann, besteht aus zwei fünfzackigen symmetrischen Sternen. Die zwei fünfzackigen Sterne sind mit zwei Schraubverbindungen miteinander befestigt, sodass man den Winkel, den die beiden Sterne zueinander bilden, verändern kann. Im Extremfall liegen die Sterne dann aufeinander.

Idealisiert bilden die beiden fünfzackigen Sterne dann nur noch einen fünfzackigen Stern, den man auch flach hinlegen kann. Modelliert man die zusammengeklappten fünfzackigen Sterne und legt sie so in ein ebenes Koordinatensystem, dass zwei Zacken auf der x-Achse liegen und der Stern symmetrisch zum positiven Teil der y-Achse liegt, so erhält man ein Zehneck.

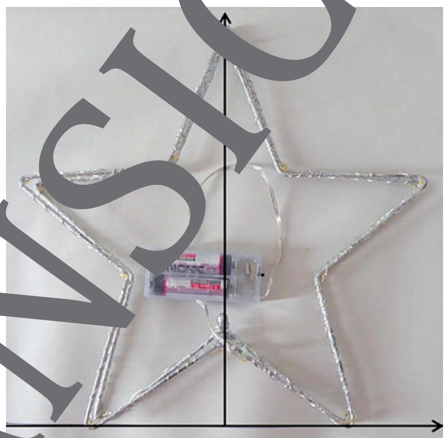


Foto: Günther Weber

Die Eckpunkte des Zehnecks liegen auf zwei konzentrischen Kreisen mit dem Mittelpunkt M(0 | 12,5). Der Kreis, der durch die äußeren Ecken/Zacken des Sterns verläuft, hat einen Radius von 15,45 cm, der Winkel an der Spitze der äußeren Zacken hat eine Größe von 45° (siehe **M 1**).