Anwendung von Matrizen

Dr. Jürgen Leitz, Hamburg
Illustrationen von Dr. Jürgen Leitz

Illustration: Mona Hitzenauer

In diesem Beitrag modellieren die Jugendlichen einfache Verflechtungen (betriebswirtschaftliche Modelle) mithilfe von Übergangsgraphen (Gozintographen) und Matrizen. Zur Lösung der Aufgaben verwenden sie die üblichen Verknüpfungen zwischen Matrizen und Vektoren (Addition / Multiplikation von Matrizen, Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar bzw. Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor).

Anwendung der Matrizenrechnung

Oberstufe (weiterführend)

Dr. Jürgen Leitz, Hamburg
Illustrationen von Dr. Jürgen Leitz, Hamburg

Die Schüler lernen:

die Grundlagen der Matrizenrechnung anhand einfacher Aufgaben kennen. Sie vertiefen das mathematische Modellieren und Lösen von Problemen mithilfe der Matrizenrechnung an Praxisaufgaben aus der Wirtschaft und Biologie.

M 1 Definition einer Matrix

Begriff der Matrix

Eine Matrix (Mehrzahl: Matrizen) ist ein Zahlenschema, das in runde Klammern eingeschlossen ist:

$$A_{(m,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{; Beispiel: } B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & \text{[illegible]} & 4 & 7 \\ -2 & 6 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Werte in diesem Schema heißen **Elemente** der Matrix. Die „waagerechten Elemente“ bilden jeweils die Zeilen, die „senkrechten Elemente“ bilden jeweils die Spalten der Matrix.

Dimension einer Matrix

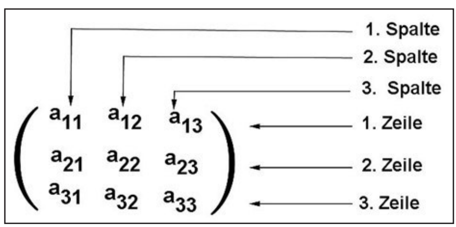
Durch die Anzahl der Zeilen und der Spalten wird die Dimension einer Matrix festgelegt. Die Dimension einer Matrix mit m Zeilen und n Spalten, also $m \cdot n$ Elementen, lautet $(m \times n)$, sprich: „m Kreuz n“. Eine Matrix der Dimension $(m \times n)$ nennt man auch $(m \times n)$-Matrix.

Beispiel: Die o. a. Matrix B hat 3 Zeilen und 4 Spalten, ihre Dimension lautet somit (3×4).

Indizierung der Elemente

Durch die Indizierung ist die Position eines Elements in der Matrix eindeutig bestimmt. Dies geschieht durch zwei Indizes. Der erste Index gibt die Zeile an, in der das Element in der Matrix steht, der zweite Index die Spalte.

Beispiel: Das Element a_{32} befindet sich in der 3. Zeile und 2. Spalte und hat in der o. a. Matrix B den Wert 6.



Grafik: Dr. Jürgen Leitz

M 2 Spezielle Matrizen

Transponierte Matrix

Vertauscht man in einer Matrix A der Dimension $(m \times n)$ die Zeilen mit den Spalten, so erhält man eine Matrix der Dimension $(n \times m)$. Eine solche Matrix wird die zur Matrix A transponierte Matrix genannt und mit $\mathbf{A^T}$ bezeichnet.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \\ -2 & 6 & 8 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

(3×4)-Matrix $\Rightarrow$ (4×3)-Matrix

Zeilen- und Spaltenvektoren

Jede Zeile der Matrix stellt einen Zeilenvektor, jede Spalte der Matrix einen Spaltenvektor dar. Eine Matrix der Dimension $(m \times n)$ hat somit m Zeilenvektoren und n Spaltenvektoren.

Vektoren sind spezielle Matrizen

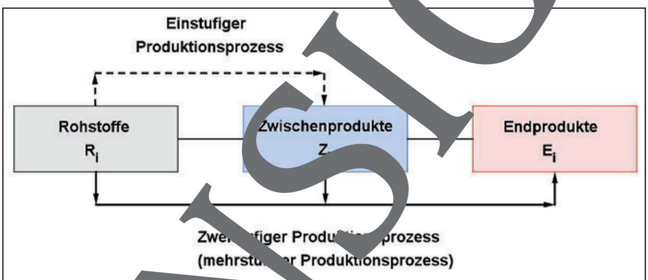
– Der Spaltenvektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$ ist eine $(m \times 1)$-Matrix.

– Der Zeilenvektor $\vec{s}^T = \vec{z} = (a_1, a_2, a_3 \ . \ . \ . \ a_n)$ ist eine $(1 \times n)$-Matrix.
Es ist zu erkennen, dass ein Spaltenvektor durch Transponieren in einen Zeilenvektor umgewandelt werden kann und umgekehrt.

– Quadratische Matrix:
Stimmt in einer Matrix die Anzahl der Zeilen mit der Anzahl der Spalten $(n = m)$ überein, so nennt man diese Matrix eine quadratische Matrix. Die Spaltenanzahl n nennt man Ordnung der Matrix. Die Hauptdiagonale einer quadratischen Matrix umfasst die Elemente $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$.

M 4 Produktionsprozesse

Produktionsprozesse in der Industrie setzen sich aus mehreren Verarbeitungsstufen zusammen. Aus den Ausgangsstoffen (z. B. Rohstoffen) werden zunächst Zwischenprodukte hergestellt. Diese Zwischenprodukte können dann in weiteren Produktionsstufen zu anderen Zwischenprodukten bzw. bei Bedarf schließlich zu Endprodukten verarbeitet werden. Diese mehrstufigen Produktionsprozesse werden auch Materialverflechtungsprozesse genannt, die auch in der Praxis (etwa in großen Chemiekonzernen oder Elektronikfirmen) sehr komplex sind. Diese Prozesse lassen sich sehr gut mithilfe von Matrizen beschreiben: Bei den Matrizen schreibt man sinnvoll hinter den eigentlichen Namen (z. B. „A“) noch als Index, aus welchen Stoffen diese Matrix besteht.



Grafik: Dr. Jürgen Leitz

Beispiele: Die Matrix A_{RZ} (Rohstoff-Zwischenprodukt–Matrix = Verflechtungsmatrix der 1. Produktionsstufe) gibt an, wie viele Mengeneinheiten (ME) der einzelnen Rohstoffe R_i nötig sind, um jeweils eine ME der einzelnen Zwischenprodukte Z_i herzustellen.

Die Matrix B_{ZE} (Zwischenprodukt-Endprodukt–Matrix = Verflechtungsmatrix der 2. Produktionsstufe) gibt an, wie viele Mengeneinheiten (ME) der einzelnen Zwischenprodukte Z_i nötig sind, um jeweils eine ME der einzelnen Endprodukte E_i herzustellen.

Die Matrix C_{RE} (Rohstoff-Endprodukt-Matrix = Technologie-Matrix) gibt an, wie viele Mengeneinheiten (ME) der einzelnen Rohstoffe R_i nötig sind, um jeweils eine ME der einzelnen Endprodukte E_i herzustellen. Die Matrix C_{RE} erhält man als Produktmatrix aus den beiden Matrizen A_{RZ} und B_{ZE}: $A_{RZ} \cdot B_{ZE} \Leftrightarrow C_{RE} = A_{RZ} \cdot B_{ZE}$. Neben den Matrizen gibt es dann noch die entsprechenden Vektoren. (Bestell-)Mengenvektoren (immer Spaltenvektoren): $\vec{x}_R$, $\vec{x}_Z$ und $\vec{x}_E$. Kostenvektoren als variable Kosten je ME, Stückkosten (Zeilenvektoren): $\vec{k}_R$, $\vec{k}_Z$ und $\vec{k}_E$.


RAABE
UNTERRICHTSMATERIAL RAABITS SCHULLEITUNG RATGEBER UNSERE MARKEN
Unser Gratis-Material
exklusiv für Referendare!
Das RAABE-Referendarspaket
JETZT SICHERN
Gratis-Material exklusiv für Referendare!
Ich suche ...