Grundstrukturen der linearen Algebra – Gruppen und Körper

Katarina Keck, Buckenhof
Illustrationen von Anna-Greta Wittnebel

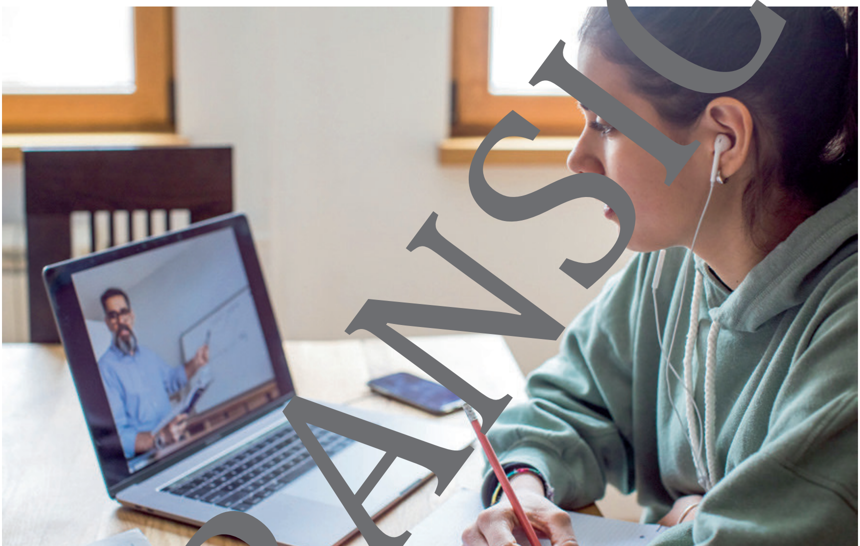


Foto: svetikd/E+/Getty Images Plus

Gruppen, Ringe und Körper bilden die Grundstrukturen der linearen Algebra, auf der ja das Gebiet *analytische Geometrie* basiert. Oberstufenschüler werden mit diesem Beitrag schrittweise an die axiomatische Denkweise im Mathematikstudium herangeführt. Vielfältige Übungsaufgaben runden den Beitrag ab.

RAABE
KLASSE SCHULE

Grundstrukturen der linearen Algebra – Gruppen und Körper

Oberstufe (Niveau)

Katarina Keck, Buckenhof
Illustrationen von Anna-Greta Wittnebel

Die Schüler lernen:

die Grundstrukturen der linearen Algebra kennen: Gruppen, Ringe und Körper. Die Konzepte werden eingeführt und in vielfältigen Übungsaufgaben angewandt. Ein Lesetext zur Person von Galois wird Schüler, die sich nicht so sehr für Mathematik interessieren, begeistern. Der Beitrag führt schrittweise an die axiomatische Denkweise im Studium heran.

Hinweise

Évariste Galois war kaum älter als die Oberstufenschüler, als er – verstrickt in die politischen Wirren des nachrevolutionären Frankreichs – bei einem Duell auf tragische Weise ums Leben kam. Seine mathematischen Ideen hatte er in der Nacht vor dem Duell so hin gekritzelt, dass die Nachwelt viele Jahre mit deren Überprüfung und Ausgestaltung zu tun hatte.
Diese altersmäßige Nähe eines der genialsten Mathematiker aller Zeiten motiviert die Schüler, sich mit der von ihm begründeten Strukturmathematik zu beschäftigen.
Galois war ganz versessen darauf, ein Rezept für die Lösung von Gleichungen 5. Grades

$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$

zu finden, eine der großen Herausforderungen der damaligen Zeit. Lesen Sie in diesem Beitrag, was seine Beschäftigung mit diesem Problem unter anderem abgeworfen hat.
Das Erkennen von Strukturen erleichtert den Überblick und ist für viele Bereiche der Mathematik von grundlegender Bedeutung.

Förderung für mathematisch interessierte Schüler

Mit Überarbeitung der Lehrpläne fielen viele mathematisch reizvolle Inhalte weg und damit weitgehend die Möglichkeit, interessierte Schüler auf die Denkweise der universitären Mathematik vorzubereiten. Die Begriffe *Gruppe*, *Ring* und *Körper* kommen nicht mehr im Lehrplan vor. Ihre Betrachtung ist aber aus strukturmathematischer Sicht aufschlussreich. Lassen wir für die Vektoren außer der Vektoraddition auch die skalare Multiplikation zu, also die Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen, so haben wir zwei Rechenoperationen, eine interne (die Addition von zwei Vektoren, bei der wieder ein Vektor herauskommt) und externe (Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl, bei der ebenfalls wieder ein Vektor herauskommt). Dabei bildet die Menge der Vektoren eine Gruppe, die Menge der reellen Zahlen einen Körper. Der Vektorraum ist Gegenstand der Lehrpläne.

Lernvoraussetzungen

Dieser Exkurs hat seinen Platz nach der Einführung der Vektoraddition, wenn deren Eigenschaften (Kommutativität und Assoziativität) behandelt sind.

Ablauf

Die Materialien **M 1** und **M 2** stellen den Schülern zwei besondere Verknüpfungen vor. In M 1 werden Vertauschungen von drei Elementen miteinander verknüpft. M 2 thematisiert die Modulo-Operation.

Wir verwenden in **M 1** das allgemeine Verknüpfungssymbol ⊙, da man wegen der mangelnden Kommutativität streng darauf achten muss, zuerst die rechts stehende Vertauschung durchzuführen. Dies ist bei der den Schülern bekannten Addition anders. Weisen Sie die Lernenden auf diesen Unterschied hin. Bei der Verkettung von Funktionen begegnen die Schüler diesem Phänomen wieder (im Allg. $f(g(x)) \neq g(f(x))$).

Beispiel:

$f(x) = 3x;\ g(x) = 7x + 1$

$\Rightarrow f(g(x)) = 3\,(7x + 1) = 21x + 3$ und

$g(f(x)) = 7(3x) + 1 = 21x + 1;$ 31 q.e.d.

Mit **M 3** führen Sie den Begriff der *Gruppe* ein. Die Schüler überprüfen, ob die Gruppeneigenschaften auch auf die Addition von Vektoren zutreffen, und vernetzen damit ihr bisher erworbenes Wissen. Die Vektoraddition hat die gleichen Eigenschaften wie die Addition von Zahlen. Zuletzt wenden die Schüler den Begriff *Gruppe* auf die Menge der Polynome an.

Im Lesetext **M 5** erfahren die Schüler, was für ein Mensch Évariste Galois war und auf welche Art sein früher Tod mit der politischen Situation im nachrevolutionären Frankreich verknüpft ist. Sein jugendliches Alter ist für die Schüler ein Ansporn. Galois definierte zwar den Begriff der Gruppe (noch) nicht, ist aber nicht nur als Begründer der nach ihm benannten Galoistheorie anzusehen, sondern – neben Niels Henrik Abel (1802–1829) – auch als ein Begründer der Gruppentheorie.

Material **M 6** stellt die Begriffe *Ring* und *Körper* vor. Die Schüler wenden diese neuen Begriffe auf die bisher behandelten Strukturen an. In **M 7** kommt der Begriff des *Vektorraumes* hinzu. Dieser Begriff wurde tatsächlich von den Vektoren abgeleitet. Die Schüler wenden ihn auf die Gruppe der Polynome an. Die Vernetzung mit der Funktionenlehre vollziehen sie, indem sie wiederholen, wie sich der Graph einer Polynomfunktion durch die Multiplikation des Funktionsterms mit einer reellen Zahl verändert.

M 1 Vertauschungen verketten – Aufgaben

Hinweis: Beachten Sie die Reihenfolge!

1. Schreiben Sie alle sechs möglichen Anordnungen der Ziffern 1, 2 und 3 auf:

$$\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}123\\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}123\\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}123\\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}123\\ \end{pmatrix}$$

2. Man kann zwei Vertauschungen hintereinander ausführen. Dabei wird zuerst die <u>rechte</u> Vertauschung ausgeführt.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix}123\\ \downarrow \\312\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}123\\ \downarrow \\213\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}123\\ \downarrow \\132\end{pmatrix}$$

Die 3 bleibt zunächst fix und wird dann auf die 2 abgebildet, insgesamt wird sie also auf die 2 abgebildet. Die 2 wird auf die 1 abgebildet und diese dann auf die 3, insgesamt wird die 2 also auf die 3 abgebildet. Usw.

Verknüpfen Sie ebenso – beachten Sie die Reihenfolge!

a) $\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}123\\ \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}123\\ \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}123\\ \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}123\\ \end{pmatrix}$

3.

a) Was fällt Ihnen an der Aufgabe 2d) auf?

Hinweis: Die Vertauschung $\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}$ heißt deswegen ***neutrales Element***.

b) Welche Zahl hat beim Addieren von Zahlen dieselbe Eigenschaft?

c) Welcher Vektor übernimmt dieselbe Rolle bei der Vektoraddition?

4. Suchen Sie zur zweiten Vertauschung eine erste Vertauschung mit der Eigenschaft, dass die Hintereinanderausführung der beiden Vertauschungen das neutrale Element ergibt. Die zweite Vertauschung soll also den Rücktausch der ersten Vertauschung bewirken:

$$\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}123\\ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}$$

Die Rücktauschung hat den Namen ***inverses Element***. Dass bei der Hintereinanderausführung von Vertauschungen jede Vertauschung ihr eigener Rücktausch ist (= ihr eigenes inverses Element), muss nicht unbedingt so sein.

Gegenbeispiel:

$$\begin{pmatrix}1234\\2413\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}1234\\2413\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1234\\ \end{pmatrix}$$

5. Testen Sie an den Aufgaben 2a) und 2b), ob die Hintereinanderausführung von Vertauschungen kommutativ ist. Testen Sie an einem selbst gewählten Beispiel, ob die Hintereinanderausführung von Vertauschungen assoziativ ist.

Die Operation *Modulo*

Die Modulo-Operation macht man sich am besten anhand des Ziffernblattes einer (analogen) Uhr klar. Ist es jetzt 10 Uhr, so ist es auf dem Zifferblatt in 5 Stunden nicht 15 Uhr, sondern 3 Uhr. Das Ergebnis dieser Addition kann nämlich nur eine Zahl zwischen 0 (≙ 12) und 11 sein.

Wie berechnen Sie diese?

In 40 Stunden ist es nicht 50 Uhr, sondern

$50 - 12 - 12 - 12 - 12 = 2$ (Uhr).

Sie subtrahieren also so oft 12, wie es geht, ohne dass das Ergebnis eine negative Zahl ist.

Oder Sie dividieren 50 durch 12, und zwar mit Rest:

$50 : 12 = 4$ Rest 2

Der Rest muss eine Zahl zwischen 0 und 11 sein. Er gibt die neue Uhrzeit an.

Diese Rechnung nennt man ***Modulorechnung***. Die Operation ***Modulo*** ist eine wichtige Anwendung bei Verschlüsselungen im Internet (Pretty Good Privacy = pgp von Phil Zimmermann).

M 2 Aufgaben zur Operation *Modulo*

1. Stellen Sie eine Verknüpfungstafel für die Modulorechnung auf. Wir beschränken uns dabei auf die Zahlen von 0 bis 5, d. h., wir rechnen modulo 6.

	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

2.

a) Wie sorgt man bei der Modulorechnung dafür, dass jedes Ergebnis wieder eine Zahl zwischen 0 und 5 ist?

b) Überprüfen Sie die Eigenschaften *Kommutativität* und *Assoziativität* an Beispielen.

c) Können Sie mit Sicherheit sagen, die Modulorechnung sei/sei nicht kommutativ/assoziativ?

d) Geben Sie das neutrale Element an.

e) Bestimmen Sie zu jedem Element sein inverses Element.

M 3 Die Gruppe und ihre Begründer

Im 19. Jahrhundert beschäftigten sich zwei junge Männer mit Gruppen: der Franzose Evariste Galois (vgl. **M 5**) und der Norweger Niels Henrik Abel (1802–1829). Ursprünglich wollten sie Lösungsformeln für Gleichungen finden, ähnlich der sog. *Mitternachtsformel* für quadratische Gleichungen, allerdings für Gleichungen höheren Grades. Beide fanden einen Zusammenhang zu den hier beschriebenen Gruppen. Seitdem beschäftigt sich die Algebra an den Universitäten mit Strukturen, während die Algebra der Schule weiterhin im Wesentlichen auf das Lösen von Gleichungen und die dazu nötigen Termumformungen beschränkt bleibt.

Hinweis: Die Mitternachtsformel für quadratische Gleichungen lautet:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ wobei gilt: } ax^2 + bx + c = 0 \text{ und } a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

Die Verkettung von Vektoren: Wir sprechen bei der Verkettung von Vektoren von *Addition*, obwohl man eigentlich ja nur Zahlen addieren kann. Diese Vorgehensweise ist für die Mathematik typisch: Ausgehend von den Eigenschaften der Addition ganzer Zahlen überträgt man den Begriff *Addition* auf die Verkettung von Vektoren.

Welche Eigenschaften sind dies? – Die Gruppenaxiome

– **Abgeschlossenheit (G1):**

Addieren Sie zwei ganze Zahlen, so kommt wieder eine ganze Zahl heraus.
Hinweis: Bei der Division ist dies nicht immer der Fall.

– **Existenz eines neutralen Elementes (G2):**

Addiert man die Zahl Null zu einer beliebigen Zahl, so ändert sich diese nicht. Man nennt die Zahl Null deswegen *neutrales Element* der Addition.

– **Existenz eines inversen Elementes (G3):**

Zu einer beliebigen ganzen Zahl lässt sich eine andere ganze Zahl finden, sodass deren Summe gerade Null ergibt. Beispielsweise muss man zur Zahl 7 die Zahl –7 (die Gegenzahl) addieren.

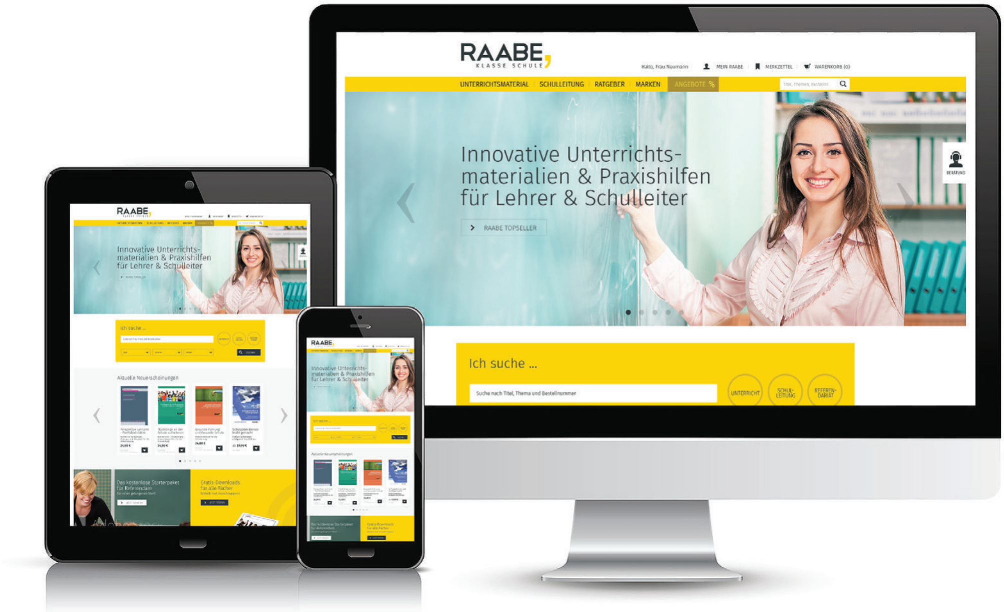
– **Assoziativität (G4):**

Egal, ob Sie bei der Verkettung zweier Additionen Klammern setzen oder sie weglassen, es kommt immer dasselbe Ergebnis heraus:

$$(317 + 27) + 973 = 317 + (27 + 973) = 1317$$

Hinweis: Viele Rechenvorteile beim Kopfrechnen lassen sich daraus gewinnen. Die Mathematiker nennen die ganzen Zahlen zusammen mit der Addition eine *Gruppe*, weil die Eigenschaften G1 bis G4 erfüllt sind.

Der RAABE Webshop:
Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung