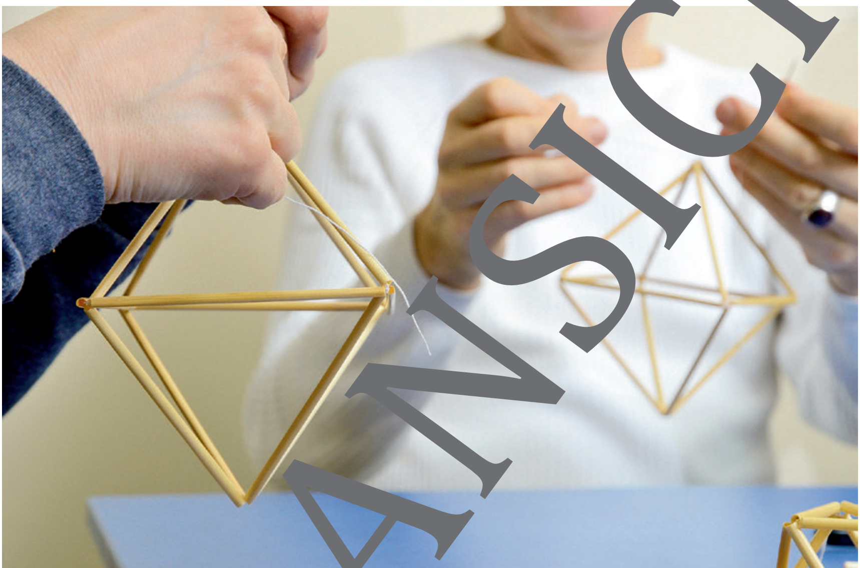
Analytische Geometrie am Himmeli

Günther Weber, Brilon
Illustrationen von Günther Weber



Mit einem traditionellen Weihnachtsschmuck aus Skandinavien, dem „Himmeli", verbessern die Lernenden in diesem Beitrag besonders ihr räumliches Vorstellungsvermögen. In vielfältigen Aufgaben und Problemstellungen wenden sie ihr Können und Wissen der analytischen Geometrie an und bestimmen etwa Schnittpunkte, Schnittwinkel und Abstände zwischen Geraden und Ebenen.

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie k. II

Dr. Josef Raabe Ver s-GmbH
Ein Unternehmen der Gru pe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +4 711 6 0
Fax +49 11 62900-60
meinRA E@raabe.de
www.raa .de

Re tion: An Wittnebel
Satz: er Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnach eis Titel: © Oks Mit/iStock/Getty Images Plus
Illustration : Günther Weber, Brilon
Lekt a Hitzenauer, Regensburg
Korrektorat: anna Stotz, Wyhl a. K.

Analytische Geometrie am Himmeli

Oberstufe (Niveau)

Günther Weber, Brilon
Illustrationen von Günther Weber

Die Schüler lernen:

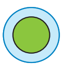
ihre bereits erworbenen Fähigkeiten in der analytischen Geometrie im räumlichen Koordinatensystem sicher anzuwenden. Dabei müssen sie sich verschiedene Strecken und Flächen in Sechseckpyramiden und -stümpfen vorstellen und unter anderem Schnittpunkte, Schnittwinkel und Abstände von Geraden und Ebenen bestimmen.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt
Fo = Farbfolie

Thema	Material	Methode
Das Kantenmodell eines Himmeli	M 1	Ab
Aufgaben	M 2	Ab
Das Himmeli – Farbfolie	M 3	Fo

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Kompetenzprofil

Inhalt: räumliches Koordinatensystem, Sechseckpyramide, Sechseckpyramidenstumpf, Satz des Pythagoras, Spiegelung an den Koordinatenebenen, Schnittpunkt von Gerade und Ebene, Ebenen- und Geradengleichungen, Schnittwinkel von Geraden und Ebenen, Mittelpunkt einer Strecke, Volumen von Pyramide und Pyramidenstumpf, Teilungsverhältnis, Strahlensätze, Gleichung einer Ortslinie
Medien: GTR/CAS, GeoGebra
Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K 1), Probleme mathematisch lösen (K 2), mathematisch modellieren (K 3), mathematische Darstellungen verwenden (K 4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K 5)

Analytische Geometrie am Himmeli

Methodisch-didaktische Anmerkungen:

Beim Himmeli handelt es sich aus mathematischer Sicht um das Kantenmodell eines Körpers. Bei den Aufgaben wird aber teilweise davon ausgegangen, als würde es sich um einen kompakten Körper.

Wird der Körper – evtl. von einigen Schülern vor der Bearbeitung der Aufgaben – gebastelt, um das Himmeli als Anschauungsobjekt zur Verfügung zu haben, so bietet es sich an, keine Strohhalme zu nehmen, da diese an den Ecken sehr leicht durch die Fäden einreißen können. Im vorliegenden Fall wurde das Himmeli aus Papierhalmen gebastelt. Liegt kein gebasteltes Himmeli vor, so können Sie als Lehrkraft z. B. ein mit GeoGebra (*https://www.geogebra.org/classic#3d*) erstelltes Himmeli über den Beamer projizieren. Damit können abschließend auch die Ergebnisse kontrolliert werden.

Reguläres Sechseck

Vor der Bearbeitung von **Aufgabe [illegible]** sollte im Unterrichtsgespräch noch einmal die Eigenschaften des regulären Sechsecks wiederholt werden.

Ein regelmäßiges Sechseck besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken. Ist a die Länge der Sechseck-/Dreieckseite, so hat die Höhe h des Dreiecks die Länge

$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ (Satz des Pythagoras)

und die Länge der Diagonalen im Sechseck beträgt 2a.

Verschiedene Lösungsansätze – Gruppenarbeit möglich

Die meisten Aufgaben können auf verschiedene Art und Weise gelöst werden. Weist man die Lernenden darauf hin oder arbeitet man die Möglichkeiten im Unterrichtsgespräch heraus, so können die Aufgaben gruppenweise auf unterschiedliche Arten gelöst werden und die Lösungswege anschließend vorgestellt werden.

M 1 Das Kantenmodell eines Himmeli

Bei einem Himmeli handelt es sich um einen ursprünglich aus Strohhalmen gebastelten geometrischen Körper (genauer gesagt um das **Kantenmodell** eines geometrischen Körpers), der als Mobile von der Zimmerdecke oder einem Fenstersims herabhängt.
Ganz traditionell stammt das „Himmeli" aus den nördlichen Gefilden Finnlands, Schwedens, Litauens und Lettlands, wo es als Weihnachtsdekoration gebastelt wird. Es sollte Glück bringen für die Ernte des neuen Jahres.
Das in Abb. 2 (Seite 3) dargestellte Himmeli setzt sich aus jeweils 6 Halmen zusammen, die je 3 cm, 6 cm, 15 cm und 18 cm lang sind.

Bastelanleitung

Dieses Himmeli kann folgendermaßen gebastelt werden: Zuerst werden die 3 cm langen Stücke aufgefädelt, zu einem regulären Sechseck gelegt und der Faden wird fest verknotet. Die überstehenden Fäden können am Ende abgeschnitten werden.
Ebenso verfährt man mit den 6 cm langen Halmen.
Anschließend wird ein Faden durch einen 18 cm langen Halm geführt und die Enden des Fadens werden an einer Ecke des kleinen und einer Ecke des großen Sechsecks verknotet. Ebenso verfährt man mit den anderen 18 cm langen Halmen, sodass ein dreidimensionaler Körper entsteht, bei dem die Sechseckflächen parallel verlaufen.
Um die Spitze des Himmelis zu formen, wird ein Faden an einem der Eckpunkte des größeren Sechsecks verknotet und der Faden dann durch zwei 15 cm lange Halme gezogen. Das Ende des Fadens verknotet man an der gegenüberliegenden Ecke des größeren Sechsecks, sodass eine Spitze entsteht. Dies wiederholt man noch zwei Mal mit den anderen 15 cm langen Halmen.

Hängt man das Himmeli gedanklich in ein geeignetes Koordinatensystem, so liegt das größere Sechseck am besten in der x-y-Koordinatenebene und das kleinere Sechseck in einer dazu parallelen Ebene E_1. Der Körper ist symmetrisch zur x-z- und zur y-z-Koordinatenebene (siehe Abb. 2). Der Punkt Su_1 liegt im 1. Oktanten.

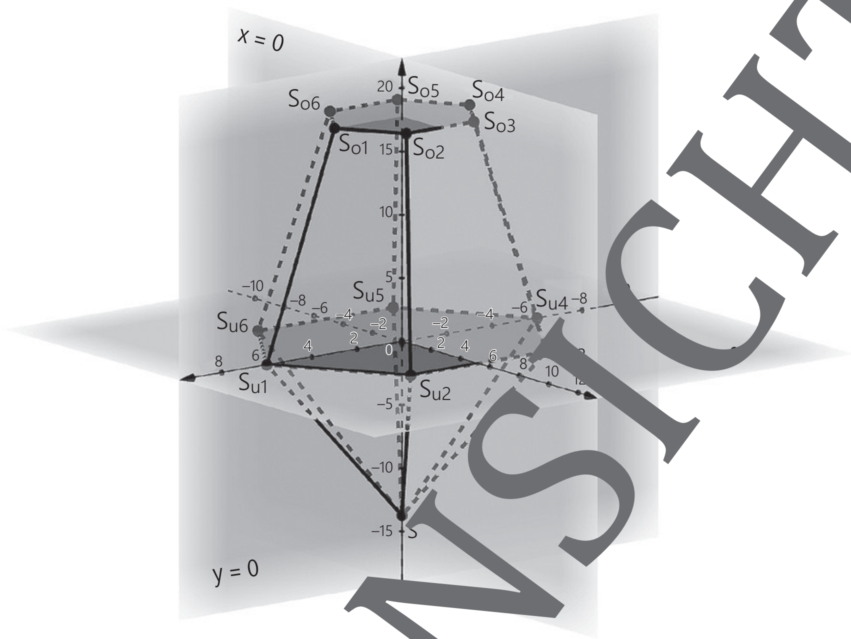


Abb. 2, © Günther Weber

M 2 Aufgaben

1. Beschreiben Sie, aus welchen Teilkörpern sich das Himmeli zusammensetzt.

2. Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Himmeli im Koordinatensystem.

3. Winkelbetrachtungen:
   a) Die Kanten des oberen und unteren Teilkörpers stoßen in den Eckpunkten des größeren Sechsecks zusammen. Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen den Kanten.
   b) Die benachbarten Seitenflächen der beiden Teilkörper stoßen in einer Seite des größeren Sechsecks zusammen. Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Flächen.

4. In das Himmeli soll vom kleineren Sechseck aus eine Kugel, die an einer Schnur hängt, eingeführt werden. Der Mittelpunkt der Kugel soll dabei in der Mitte zwischen dem Mittelpunkt M des kleineren Sechsecks und der Spitze liegen. Der Radius der Kugel soll so groß sein, dass die Kugel gerade noch durch das kleinere Sechseck passt, also dessen Seiten berührt (die Dicke der Halme wird hierbei nicht berücksichtigt).
   a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius der Kugel.
   b) Berechnen Sie den Abstand der Kugel zur Seitenkante $\overline{S_{u1}S_{o1}}$ und zur Seitenfläche $S_{u1}S_{u2}S_{o2}S_{o1}$.

Anna, die das Himmeli gebastelt hat, findet, dass es zu „länglich“ aussieht. Sie beschließt daher, ein neues Himmeli zu bauen, bei dem die Seiten des größeren Sechsecks 12 cm lang sind, die übrigen Seitenlängen behält sie bei.

5.

a) Berechnen Sie, um wie viel Prozent sich die Höhe des Himmelis verringert.

b) Ist das Volumen des neuen Himmelis kleiner oder größer als das Volumen des alten? Geben Sie erst eine Einschätzung ab und berechnen Sie dann, um wie viel Prozent sich das Volumen des Himmelis verändert hat.

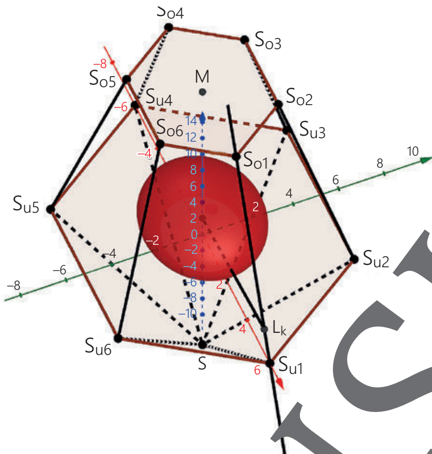
6. Verbindet man in dem von den beiden Sechsecken begrenzten Körper einen Eckpunkt des unteren Sechsecks mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt des oberen Rechtecks, so erhält man eine Raumdiagonale des Körpers. Diese Raumdiagonalen schneiden sich in einem Punkt.

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Raumdiagonalen im alten und im neuen Himmeli und berechnen Sie jeweils das Teilungsverhältnis.

b) Hat das größere Sechseck die Seitenlänge u ($u > 3$) und bleiben die anderen Kantenlängen unverändert, so ist das Teilungsverhältnis abhängig von u. Bestimmen Sie eine Funktion in Abhängigkeit von u, die das Teilungsverhältnis angibt.

M 3 Das Himmeli

Aufgabe 4b)



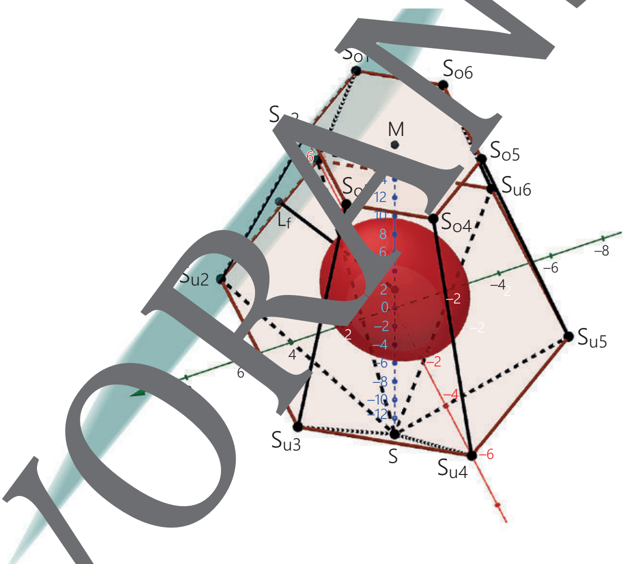


Abb. 3 *© Günther Weber*