Lernzirkel zur Analytischen Geometrie

Dr. Jürgen Leitz, Hamburg
Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing

Verfahren zur Lösu[illegible] linea[illegible] [illegible]ungssysteme, Kollinearität und Komplanarität von Vektoren und Lagebezi[illegible]ngen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen – mit diesem Stationenzi[illegible] [illegible]reiten sic[illegible] [illegible]e Schüler ideal auf das Abitur vor. Die Übungsaufgaben variieren im Schwie[illegible]keitsgrad. Sie können sie im Sinne einer Binnendifferenzierung gezielt [illegible]setzen, um [illegible]wohl leistungsschwächere als auch leistungsstärkere Schüler ide[illegible] zu f[illegible]ern.

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek. II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Ann[illegible]ta W[illegible]tnebel
Satz: Röser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: © Peter M Fisher, The Image Bank, Getty Images Plus
Illustrationen: Dr. W. Zettlmeier, Barbing
Lektorat: M[illegible]a Hitzenauer, Regensburg
Korrektorat: Johanna Stotz, Wyhl a. K.

Lernzirkel zur Analytischen Geometrie

Oberstufe (Niveau)

Dr. Jürgen Leitz, Hamburg
Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing

Die Schüler lernen:

Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme, Kollinearität und Komplanarität von Vektoren und Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen – mit diesem Stationenzirkel bereiten sich Ihre Schüler ideal auf das Abitur vor. Die Übungsaufgaben variieren im Schwierigkeitsgrad. Sie können sie im Sinne einer Binnendifferenzierung gezielt einsetzen, um sowohl leistungsschwächere als auch leistungsstärkere Schüler ideal zu fördern.

Lernzirkel zur Analytischen Geometrie

Fachwissenschaftliche Einordnung

Lineare Gleichungssysteme (LGS) sind aus der Medizin, der Technik sowie aus den Natur- und Wirtschaftswissenschaften einschließlich ihrer Anwendungsgebiete nicht wegzudenken und nehmen dort einen festen Platz ein. Sie sind als Hilfsmittel bei der Lösung komplexer Problemstellungen von großer Bedeutung. Zum Beispiel spielt die computerbasierte Lösung großer LGS bei der Computertomografie in der Medizin eine elementare Rolle, denn die dabei erzeugten Schnittbilder entstehen nicht sofort optisch, sondern müssen aus den gemessenen Rohdaten rekonstruiert werden. In der Mathematik finden LGS u. a. Anwendung bei der Prüfung von Vektoren auf lineare Abhängigkeit und Komplanarität, bei der Untersuchung von Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen sowie bei der Umwandlung von Darstellungsgleichungen für Ebenen.

Methodisch-didaktische Hinweise

Die vorliegende Unterrichtseinheit ist für ca. sechs Unterrichtsstunden vorgesehen. Den Schwerpunkt der Einheit bildet die Lösung linearer Gleichungssysteme bei der Untersuchung von Vektoren auf Kollinearität und Komplanarität und bei der Bestimmung von Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen.

Die Schüler besitzen bereits Kenntnisse über Kollinearität und Komplanarität von Vektoren, über mögliche Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten (Punkten, Geraden, Ebenen) sowie über LGS (s. a. Voraussetzungen).

In der ersten Doppelstunde wiederholen die Schüler dazu bereits bekanntes Wissen über Kollinearität und Komplanarität von Vektoren, über Lagebeziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen sowie über lineare Gleichungssysteme. Dies geschieht im geführten Unterrichtsgespräch mithilfe von Informationsblättern bzw. davon angefertigten Folien.

Zur Übung und Festigung sowie als Lernerfolgskontrolle erfolgt die Bearbeitung entsprechender Aufgaben in Form eines Lernzirkels, der aus den vier Stationen „LGS 1“ (Station 1), „LGS 2“ (Station 2), „LGS 3“ (Station 3) und „LGS 4“ (Station 4) besteht. Jede Station enthält zwei Aufgaben. Bei Aufgabe 1 sind Vektoren auf lineare Abhängigkeit (Kollinearität bzw. Komplanarität) zu untersuchen. Bei der Lösung von Aufgabe 2 müssen die Schüler jeweils ihre Kenntnisse über Lagebeziehungen von Punkt /Gerade, Punkt /Ebene, Gerade /Gerade, Gerade /Ebene und Ebene /Ebene anwenden. Station 1 und 2 beinhalten jeweils noch eine dritte Aufgabe zur Anwendung von LGS in der Analytischen Geometrie, und zwar die Umwandlung von Parametergleichungen in Koordinatengleichungen. Diese Aufgaben sind optional, falls noch Zeit bleibt.

Die Schüler arbeiten wegen der Ansteckungsgefahr während der Corona-Pandemie in Einzelarbeit bzw. allenfalls mit einem Partner zusammen. Der Lernzirkel sieht vor, dass jede Station von jedem Schüler in ⅓ einer Unterrichtsstunde durchlaufen wird. Je nach Leistungsstärke der Schüler kann diese Zeit auch verkürzt werden. Aufgaben, die nicht geschafft werden, sind zu Hause fertigzustellen.

Tippkarten bieten Hinweise zur jeweiligen Aufgabe. Sie stellen Lösungshinweise dar, ohne dass die Lösung vorweggenommen wird. Die Schüler können hier nachlesen, wenn sie nicht wissen, wie sie mit der Lösung einer Aufgabe beginnen sollen. Zu einigen Aufgaben gibt es mehrere Hinweise und Tipps. Die Schüler sollen hier nach dem Lesen eines Tipps nochmals nachdenken, ob sie nun einen Lösungsweg finden, bevor sie den nächsten Tipp lesen. Ausführliche Lösungen der Aufgaben liegen am Lehrerpult aus, sodass die Schüler ihre Rechnungen und Ergebnisse nach Beendigung einer Station überprüfen können.

Voraussetzungen

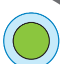
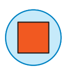
- Kollinearität, Linearkombination und Komplanarität von Vektoren
- Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten (Punkte, Geraden und Ebenen) im zwei- und dreidimensionalen Raum
- Äquivalenzumformungen bei Gleichungen
- Lineare Gleichungssysteme (LGS) mit zwei und mehr Variablen
- Homogene und inhomogene LGS
- Unter- und überbestimmte LGS

- Lösungsverfahren (Einsetzungs-, Gleichsetzungs- und Additions-, Gauß-Verfahren)
- Lösungsmenge eines LGS

Hinweise zum Arbeitsablauf für die Schüler

- Es gibt vier Stationen, die von jedem Schüler/jeder Zweiergruppe zu durchlaufen sind.
- Jede Station besteht aus zwei Aufgaben.
- Bei Aufgabe 1 sind Vektoren auf lineare Abhängigkeit (Kollinearität bzw. Komplanarität) zu untersuchen.
- Bei der Lösung von Aufgabe 2 müssen Sie jeweils Ihre Kenntnisse über Lagebeziehungen von Punkt /Gerade, Punkt /Ebene, Gerade /Gerade, Gerade /Ebene und Ebene /Ebene anwenden.
- Bearbeiten Sie die zwei Aufgaben einer Station in der vorgegebenen Reihenfolge.
- Station 1 und 2 beinhalten jeweils noch eine dritte Aufgabe zur Anwendung von LGS in der Analytischen Geometrie, und zwar die Umwandlung von Parametergleichungen in Koordinatengleichungen. Diese Aufgaben sind optional, d. h., sie können bearbeitet werden, falls noch Zeit bleibt.
- Lösen Sie die Aufgaben jeder Station in **Einzelarbeit**.
- Für das Lösen der Aufgaben einer Station ist jeweils eine Unterrichtsstunde vorgesehen. Aufgaben, die Sie in dieser Zeit nicht schaffen, sollten Sie zu Hause fertigstellen.
- Wenn Sie nicht weiterkommen, nehmen Sie die **Tippkarten** zu Hilfe. Sollten Sie auch damit keinen Lösungsweg finden, unterstützt Sie der Lehrer.
- Ausführliche Lösungen der Aufgaben liegen am Lehrerpult aus, sodass Sie Ihre Rechnungen und Ergebnisse nach Beendigung einer Station überprüfen können.

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

M 1 Lineare Gleichungssysteme (LGS) – Info

Lineare Gleichungssysteme (LGS) mit mindestens einer Variablen

Die Gleichung $7x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 10$ ist eine **lineare Gleichung**, weil die Variablen x_1, x_2, x_3 nur in der ersten Potenz vorkommen. Die Zahlen 7, – 8 und 9 heißen **Koeffizienten** (Beizahlen) der Variablen x_1, x_2, x_3. Die Zahl 10 (rechte Seite der Gleichung) ist das sogenannte **absolute Glied** der Gleichung.

Ein LGS besteht aus m Gleichungen mit $m \geq 2$ und n Variablen $n \geq 1$.

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{array}$$

Die **Lösungsmenge L** eines LGS mit n ≥ 1 Variablen ist ein n-Tupel von Elementen, das alle Gleichungen des LGS erfüllt. Ein n-Tupel ist hier eine geordnete Liste von n Zahlen,

z. B. für drei Zahlen: (5| 3| 2) oder auch in Vektorform: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Sind die absoluten Glieder $b_1, b_2, b_3, \ldots$ alle gleich null, dann nennt man das LGS **homogen**, ansonsten heißt es **inhomogen**.

Ein Gleichungssystem heißt **unterbestimmt**, wenn es weniger Gleichungen als Variablen hat (m < n). Ein Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Variablen heißt **überbestimmt** (m > n).

M 2 Verfahren zum Lösen eines LGS – Info

Äquivalenzumformungen

LGS haben stets entweder eine eindeutige, keine oder unendlich viele Lösungen. Zur **eindeutigen Lösung** eines LGS mit n Variablen sind mindestens n voneinander unabhängige Gleichungen notwendig. Zwei Gleichungen sind unabhängig, wenn sie nicht äquivalent zueinander sind.

Ein unterbestimmtes Gleichungssystem kann keine eindeutige Lösung haben, es hat entweder unendlich viele Lösungen (eine oder mehrere Variablen sind von einer frei wählbaren Variablen abhängig) oder keine Lösung. Beim überbestimmten Gleichungssystem ist nach Ermittlung der Lösung aus einigen Gleichungen noch zu überprüfen, ob diese auch alle weiteren Gleichungen, die nicht zur Ermittlung der Lösung beitrugen, erfüllt.

Zum Ermitteln der Lösungsmenge (rechnerisch) sind folgende **Äquivalenzumformungen** anzuwenden:

1. Vertauschen der Reihenfolge der Gleichungen
2. Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit einer von null verschiedenen Zahl
3. Addition (Subtraktion) des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen

Bei der Untersuchung der Lagebeziehungen von zwei geometrischen Objekten (Punkt / Gerade /Ebene) kommen LGS mit einer oder mehreren Variablen vor. Zum Lösen dieser LGS gibt es verschiedene Verfahren, die vom jeweiligen LGS abhängig sind. Für LGS mit einer und zwei Variablen eignen sich insbesondere das **Einsetzungs-**, **Gleichsetzungs-** und **Additions- bzw. Subtraktionsverfahren**. LGS mit drei und mehr Variablen löst man besser mit dem **Gauß-Verfahren** oder dem **Gauß-Jordan-Verfahren.**

M 3 Einsetzungsverfahren

Eine Gleichung des LGS wird nach einer der Variablen (oder einem geeigneten Vielfachen davon) aufgelöst (umgeformt). Anschließend wird diese neue Gleichung in die andere Gleichung eingesetzt. Dadurch erhält man eine Gleichung mit nur noch einer Variablen.

Beispiel:

Gegeben sei das LGS:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ \text{II} & 2x_1 - x_2 = 4 \end{array}$$

Aus II $2x_1 - x_2 = 4 \;\Rightarrow\;$ III $x_2 = 2x_1 - 4$

III in I einsetzen:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3\cdot(2x_1 - 4) &= 12 \\ 2x_1 + 6x_1 - 12 &= 12 \\ 8x_1 &= 24 \Rightarrow x_1 = 3 \end{aligned}$$

$x_1 = 3$ in eine der Ausgangsgleichungen einsetzen liefert $x_2 = 2$.

Damit lautet die Lösungsmenge L = {(3 | 2)}.

Möglich wäre auch:

Aus II $2x_1 - x_2 = 4 \;\Rightarrow\;$ III' $2x_1 = 4 + x_2$

III' in I einsetzen:

$$4 + x_2 + 3x_2 = 12 \Leftrightarrow 4x_2 = 8 \;\Rightarrow\; x_2 = 2$$

$x_2 = 2$ in eine der Ausgangsgleichungen einsetzen liefert $x_1 = 3$.

Damit lautet auch auf diesem Weg die Lösungsmenge L = {(3 | 2)}.

M 4 Gleichsetzungsverfahren

Beide Gleichungen werden nach derselben Variablen (oder einem geeigneten Vielfachen) aufgelöst. Durch Gleichsetzung erhält man dann eine Gleichung mit nur noch einer Variablen.

Beispiel:

Gegeben sei wieder das LGS:

I $2x_1 + 3x_2 = 12$
II $2x_1 - x_2 = 4$

Aus I $2x_1 + 3x_2 = 12 \Rightarrow$ III $2x_1 = 12 - 3x_2$

Aus II $2x_1 - x_2 = 4 \Rightarrow$ IV $2x_1 = 4 + x_2$

Gleichsetzen von III und IV:

$12 - 3x_2 = 4 + x_2 \Leftrightarrow 8 = 4x_2 \Rightarrow x_2 = 2$

$x_2 = 2$ in IV einsetzen: $\Rightarrow x_1 = 3$

Damit lautet die Lösungsmenge L = {(3 | 2)}.

M 5 Additions- bzw. Subtraktionsverfahren

Durch Multiplikation (oder Division) einer Gleichung (oder beider Gleichungen) schafft man entgegengesetzte gleiche (oder identische) Koeffizienten einer Variablen. Bei Addition (Subtraktion) beider Gleichungen fällt dann eine Variable heraus und man erhält eine Gleichung mit nur noch einer Variablen.

Beispiel 1:

Gegeben sei wieder das LGS:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ \text{II} & 2x_1 - x_2 = 4 \end{array}$$

Die Subtraktion I – II liefert: $4x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = 2$.

$x_2 = 2$ in eine der Ausgangsgleichungen einsetzen liefert $x_1 = 3$.

Damit lautet die Lösungsmenge L = {(3 | 2)}.

Beispiel 2:

Gegeben sei das LGS:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 5x_1 + 3x_2 = 21 \\ \text{II} & 7x_1 + 8x_2 = 37 \end{array}$$

Gleichung I wird mit 8 multipliziert und Gleichung II mit (–3) und es ergibt sich:

$$\begin{array}{ll} \text{III} & 40x_1 + 24x_2 = 168 \\ \text{IV} & -21x_1 - 24x_2 = -111 \end{array}$$

Die Addition III + IV liefert: $19x_1 = 57 \Rightarrow x_1 = 3$.

$x_1 = 3$ in eine der Ausgangsgleichungen einsetzen ergibt $x_2 = 2$.

Damit lautet die Lösungsmenge L = {(3 | 2)}.

Hinweis:

Die Addition (Subtraktion) zweier Gleichungen findet des Weiteren Anwendung beim Lösen von LGS mit mehr als zwei Variablen mithilfe des Gauß-Verfahrens.

M 6 LGS in Matrix-Vektor-Form

Die **Matrix-Vektor-Form** eines allgemeinen LGS lautet:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

oder kurz: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

Ein LGS wird *homogen* genannt, wenn $\vec{b} = \vec{0}$ gilt, andernfalls *inhomogen*.

Vorgehensweise zur Umformung eines LGS in Matrix-Vektor-Form:

Zunächst müssen die Gleichungen des LGS so weit wie möglich vereinfacht und nach den Variablen geordnet werden. Die linke Seite des LGS wird dann als Matrix-Vektor-Produkt geschrieben, wobei die Matrix die Koeffizienten des LGS enthält. Sie wird deshalb auch *Koeffizientenmatrix* genannt. Die Koeffizientenmatrix wird mit einem Spaltenvektor, der die Variablen enthält, multipliziert. Die absoluten Glieder des LGS werden auf der rechten Seite ebenfalls zu einem Spaltenvektor zusammengefasst.

Beispiel:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \\ \text{II} & 2x_1 & & & + & x_3 & = & 5 \\ \text{III} & 3x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung eines LGS:

Die Lösung eines LGS in Matrix-Vektor-Form kann mithilfe des Gauß-Verfahrens oder des Gauß-Jordan-Verfahrens erfolgen. In beiden Fällen bildet man eine erweiterte Koeffizientenmatrix (A | b).

M 7 Das Gauß-Verfahren – Info

Das Gauß-Verfahren

Zur Lösung des LGS wandelt man die Koeffizientenmatrix A innerhalb der erweiterten Koeffizientenmatrix (A | b) durch elementare Zeilenumformungen in eine **obere Dreiecksmatrix** um. Eine obere Dreiecksmatrix ist eine quadratische Matrix, deren Einträge unterhalb ihrer **Hauptdiagonale** alle null sind. Dabei ist es eventuell sinnvoll, die Gleichungen zunächst zu vertauschen. Die Lösungswerte ergeben sich dann schrittweise durch Auflösen der letzten Gleichungen von unten nach oben.

Beispiel:

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \text{I}\cdot(-2) \to \text{II}\;(+) \\ \text{I}\cdot(-3) \to \text{III}\;(+) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{IV} \\ \text{V} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & 6 & 4 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \text{I}\cdot(-7) \\ \text{I}\cdot 4 \;(+) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{IV} \\ \text{VI} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -11 & -33 \end{array}\right)$$

Aus VI folgt:

$-11x_3 = -33 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = 3$

$x_3 = 3$ in IV einsetzen:

$-4x_2 + 5 \cdot 3 = 7 \quad \Leftrightarrow \quad -4x_2 = -8 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 2$

$x_2 = 2$ und $x_3 = 3$ in I einsetzen:

$x_1 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - 2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1$

Somit lautet die Lösung des LGS: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

M 8 Das Gauß-Jordan-Verfahren

Zur Lösung des LGS wandelt man die Koeffizientenmatrix A innerhalb der erweiterten Koeffizientenmatrix (A | b) durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix um. Dabei ist es eventuell sinnvoll, die Gleichungen zunächst zu vertauschen. Die Lösungswerte lassen sich dann direkt aus den letzten Gleichungen ablesen.

Beispiel:

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} |\cdot(-2) \quad |\cdot(-3) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{V} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & 6 & 4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ |\cdot(-7) \\ |\cdot 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{VI} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -11 & -33 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} |\cdot(-11) \\ |\cdot 11 \\ |\cdot 5 \quad |\cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{VIII} \\ \mathrm{VII} \\ \mathrm{VI} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} -11 & -22 & 0 & -55 \\ 0 & -44 & 0 & -88 \\ 0 & 0 & -11 & -33 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} [illegible] \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{IX} \\ \mathrm{VII} \\ \mathrm{VI} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 22 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & -44 & 0 & -88 \\ 0 & 0 & -11 & -33 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} |:22 \\ |:(-44) \\ |\cdot(-11) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} [illegible] & 0 & 0 & 1 \\ 0 & [illegible] & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

M 9 Wiederholung zu LGS

Aufgabe Wh1

Prüfen Sie, ob das LGS lösbar ist. Wenn ja, geben Sie die Lösungsmenge an.

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{I} & 3x_1 & - & 4x_2 & = & 10 \\ \text{II} & -2x_1 & - & 3x_2 & = & -1 \end{array}$$

Aufgabe Wh2

Gegeben ist folgendes LGS:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & 3x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 10 \\ \text{II} & & & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \\ \text{III} & 2x_1 & - & x_2 & & & = & 4 \end{array}$$

a) Geben Sie das LGS in Matrix-Vektor-Form an.
b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS mit dem Gauß-Verfahren.

Aufgabe Wh3

Lösen Sie das LGS aus Aufgabe Wh2 mit dem Gauß-Jordan-Verfahren.

M 10 Kollinearität und Komplanarität

Kollinearität

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann <u>kollinear</u> (linear abhängig), wenn einer der beiden Vektoren ein Vielfaches des anderen ist:

$\vec{a} = r \cdot \vec{b}$ mit $r \neq 0$ bzw. $\vec{b} = s \cdot \vec{a}$ mit $s \neq 0$.

Geometrisch bedeutet das, dass die Vektoren (anti-)parallel sind. Sie haben also die gleiche oder genau entgegengesetzte Richtung.

Kollinearität steht im Zusammenhang mit dem Begriff der **Linearkombination**:

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann <u>kollinear</u> (linear abhängig), wenn es zwei reelle Zahlen r und s gibt, sodass gilt:

$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{0}$ mit $r, s \neq 0$.

Existiert für die Vektorgleichung nur die triviale Lösung $r = s = 0$, so sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear, also linear <u>un</u>abhängig.

Beispiel:

Es ist zu prüfen, ob die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ kollinear sind.

Lösung:

$\vec{a} = r \cdot \vec{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ Vektorgleichung

Aufspalten $\Rightarrow$ LGS:

I $\quad -3 = 6 \cdot r \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{1}{2}$

II $\quad 1 = 2 \cdot r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{2}$

Widerspruch! $\Rightarrow$ Das LGS ist <u>nicht</u> lösbar $\Rightarrow$ $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind nicht kollinear.

Hinweis:

Für den dreidimensionalen Raum gelten die gleichen Überlegungen.

M 11 Komplanarität

Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ im dreidimensionalen Raum heißen genau dann *komplanar*, wenn sich einer von ihnen als Linearkombination der beiden anderen darstellen lässt:
$\vec{a} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$.
Geometrisch bedeutet das, dass die drei Vektoren in einer Ebene liegen.
Alternativ gilt für die Überprüfung auf Komplanarität folgendes Kriterium:
Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind genau dann komplanar, wenn es drei reelle Zahlen r, s und t gibt, sodass gilt:
$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$ mit $r, s, t \neq 0$.
Existiert für die Vektorgleichung nur die triviale Lösung $r = s = t = 0$, so sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ nicht komplanar.

Beispiel:
Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ komplanar?

Lösung:

$r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Vektorgleichung

Aufspalten $\Rightarrow$ LGS:

I $\quad -2r + 2s = 2$
II $\quad 3r - s = 1$
III $\quad r + s = 3$
II+III $\Rightarrow$ $4r = 4 \Rightarrow r = 1$

$r = 1$ in III einsetzen: $1 + s = 3 \Rightarrow s = 2$.
$r = 1$ und $s = 2$ zur Überprüfung in I einsetzen: $-2 + 4 = 2$ (wahr).
Das LGS ist eindeutig lösbar mit nicht-trivialer Lösung.
$\Rightarrow$ Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind komplanar.

M 12 Wiederholung zu Kollinearität und Komplanarität

Aufgabe Wh4

Untersuchen Sie, ob die beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kollinear sind.

Aufgabe Wh5

Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nicht komplanar sind.

M 13 Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen

Punkte

Die Lage eines Punktes bezüglich einer Geraden bzw. Ebene kann man mithilfe der **Punktprobe** feststellen:

Man setzt die Koordinaten des Punktes in die Geraden- bzw. Ebenengleichung ein und überprüft, ob die Gleichung erfüllt wird. Wenn die Gleichungen in Parameterform vorliegen, dann erfolgt die Prüfung durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems, das man durch Aufspalten der Vektorgleichung erhält.

Gerade / Gerade – Gerade / Ebene – Ebene / Ebene

Die Lagebeziehung zweier geometrischer Objekte (Geraden oder Ebenen) kann algebraisch durch **Gleichsetzen** der beiden Gleichungen bestimmt werden (Schnittpunktbestimmung). Je nach Art der geometrischen Objekte kann das LGS über- bzw. unterbestimmt sein. Über die Lösung des LGS kann man dann eine Aussage zur gegenseitigen Lage der geometrischen Objekte machen.

Untersucht man die Lagebeziehung zweier Geraden und es liegt <u>kein</u> Schnittpunkt vor, müssen zusätzlich die Richtungsvektoren der Geraden auf lineare Abhängigkeit geprüft werden, um entscheiden zu können, ob die Geraden parallel oder windschief zueinander sind.

M 14 Wiederholung zu Lagebeziehungen

Aufgabe W6

Untersuchen Sie, ob der Punkt P auf der Geraden liegt.

$$P(2 \mid -3 \mid -3),\ g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$$

Aufgabe W7

Im folgenden Lückentext sollen die Lagebeziehungen von Punkt, Gerade und Ebene zueinander überprüft werden. Füllen Sie die Leerstellen des Textes aus.

a) Punkt / Gerade in der Ebene

Mithilfe der ______________________________ kann die Lage eines Punktes bezüglich einer Geraden ermittelt werden. Dazu setzt man die ____________________ ____________________ des Punktes in die ______________________________ ________________ ein. Aufspalten der Vektorgleichung liefert ein __________ mit ____________ Gleichungen und _________ Variablen. Das LGS ist _____________ bestimmt. Die gefundene Lösung muss _____________ Gleichungen erfüllen. Der Punkt liegt genau dann auf der Geraden, wenn das LGS ______________ ist.

b) Punkt / Gerade im dreidimensionalen Raum

Mithilfe der ________________________________ kann die Lage eines Punktes bezüglich einer Geraden ermittelt werden. Dazu setzt man die ____________________ ________________ des Punktes in die ______________________________________ ______________ ein. Aufspalten der Vektorgleichung liefert ein _____________ mit __________ Gleichungen und _________ Variablen. Das LGS ist ____________ bestimmt. Die gefundene Lösung muss ______________ Gleichungen erfüllen. Der Punkt liegt genau dann auf der Geraden, wenn das LGS _______________ ist.

c) Gerade / Gerade in der Ebene

Die beiden Geradengleichungen werden ____________________. Aufspalten der Vektorgleichung liefert ein ________ mit __________ Gleichungen und __________ Variablen. Die beiden Geraden schneiden einander in einem Punkt, wenn das LGS ________________ ______________ Lösung hat. Sie sind ____________________ (fallen zusammen), wenn das LGS ____________________ viele Lösungen besitzt. Wenn das LGS nicht ____________________ ist, dann sind die Geraden ____________________ zueinander.

d) Gerade / Gerade im dreidimensionalen Raum

Die beiden Geradengleichungen werden ____________________ ________. Aufspalten der Vektorgleichung liefert ein __________ mit ____________ Gleichungen und _________ Variablen. Das LGS ist _________ bestimmt. Die gefundene Lösung muss ______________ Gleichungen erfüllen. Die beiden Geraden schneiden einander in einem Punkt, wenn das LGS ______________ ______________ Lösung hat. Sie sind ______________________ (fallen zusammen), wenn das LGS ____________________ viele Lösungen besitzt. Wenn das LGS nicht __________________ ist, dann schneiden sich die Geraden nicht und ihre ______________________________________ müssen zusätzlich auf lineare _________________________ geprüft werden. Sind die Richtungsvektoren linear ______________________, dann sind die Geraden __________________ zueinander, ansonsten sind sie _________________________ zueinander.

e) Gerade / Ebene

Geraden- und Ebenengleichung werden ______________________. Aufspalten der Vektorgleichung liefert ein __________ mit ____________ Gleichungen und ________ Variablen. Die Gerade durchstößt (______________________) die Ebene, wenn das LGS _______________ _______________ Lösung hat. Ist das LGS _______________ _______________, so verläuft die Gerade parallel zur Ebene. Besitzt das LGS eine _______________ Lösungsmenge, dann liegt die Gerade in der Ebene.

f) Ebene / Ebene

Die beiden Ebenengleichungen werden ______________________. Aufspalten der Vektorgleichung liefert ein __________ mit ____________ Gleichungen und __________ Variablen. Das LGS ist _______________ bestimmt. Es ist also unmöglich, dass das LGS _______________ _______________ Lösung hat. Besitzt das LGS _______________ Lösung, dann sind die beiden Ebenen _________________ zueinander. Erhält man beim Umformen des LGS eine Aussage der Form ____ = ____, dann sind die Ebenen identisch. Hat das LGS eine wahre Lösung, die eine ______________________ zu einer zweiten in Beziehung setzt, so schneiden sich die Ebenen in der daraus resultierenden ______________________.

Station 1: LGS 1 mit einer Variablen – LEK

Aufgabe 1

Stellen Sie fest, ob die beiden Vektoren kollinear (linear abhängig) oder nicht kollinear sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1{,}6 \\ -2{,}0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2{,}8 \\ -3{,}5 \end{pmatrix}$

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ -3{,}6 \\ -2{,}4 \end{pmatrix}$

d) $\vec{g} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{h} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, ob der Punkt P auf der Geraden g liegt, die durch A und B geht.

a) A(2 | 3), B(5 | [illegible]), P(1 | 3)
b) A(3 | 2), B(−1 | [illegible]), P(−1 | 3)
c) A(2 | 1 | 3), B([illegible] | 0 | 2), P(4 | 3 | 5)
d) A(−1 [illegible]), B(0 | [illegible]), P(0 | −2 | 1)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Form $a\,x_1 + b\,x_2 = c$ für die Gerade g mit folgender Parametergleichung:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$

Station 2: LGS 2 mit zwei Variablen – LEK

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination der beiden Vektoren $\vec{a}$ und [illegible] dargestellt werden kann.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, [illegible] $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{c}$ [illegible] $\begin{pmatrix}1\\ \text{[illegible]}\end{pmatrix}$

c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}$

d) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\\ \text{[illegible]}\end{pmatrix}$, [illegible] $\begin{pmatrix}2\\-3\\ \text{[illegible]}\end{pmatrix}$, $\vec{c}$ [illegible] $\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}$

Aufgabe 2

a) Untersuchen Sie, ob die Punkte P und Q in der [illegible] E liegen.

P(0 | –5 | 1), Q(1 | –3 | 2), E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\ \text{[illegible]}\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\ \text{[illegible]}\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$; $r, s\in\mathbb{R}$

b) Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der beiden Geraden g und h. Geben Sie im Falle des Schneidens den gemeinsamen Schnittpunkt an.

g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$; $r\in\mathbb{R}$ h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$; $s\in\mathbb{R}$

Aufgabe [illegible]

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung mit ganzzahligen Koeffizienten für die Ebene E mit folgender Parametergleichung:

E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\ \text{[illegible]}\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$; $r, s\in\mathbb{R}$

Station 3: LGS 3 mit drei Variablen – LEK

Aufgabe 1

a) (n + 1) nicht parallele Vektoren sind im n-dimensionalen Raum immer linear abhängig, denn man kann stets einen dieser Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen.
Zeigen Sie dies beispielsweise für den Vektor $\vec{a}$, der als Linearkombination der Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ dargestellt werden kann.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Für welche Werte von k mit $k \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ k \\ -2 \end{pmatrix} \text{ komplanar?}$$

Aufgabe 2

Prüfen Sie, welche Lagebeziehung die Gerade und die Ebene zueinander haben. Geben Sie im Falle des Schneidens den gemeinsamen Schnittpunkt an.

a) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}, \quad E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};\ s, t \in \mathbb{R}$

b) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} \text{[illegible]} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \text{[illegible]} \\ 1 \\ \text{[illegible]} \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}, \quad E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3{,}5 \end{pmatrix};\ s, t \in \mathbb{R}$

Station 4: LGS 4 mit vier Variablen – LEK

Aufgabe 1

(n + 1) nicht parallele Vektoren sind im n-dimensionalen Raum immer linear abhängig, denn man kann stets einen dieser Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen.

Gegeben sind die folgenden Vektoren aus dem $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-2\end{pmatrix},\quad \vec{e}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Zeigen Sie dies beispielsweise für den Vektor $\vec{a}$, der als Linearkombination der Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ und $\vec{e}$ dargestellt werden kann.

Aufgabe 2

Prüfen Sie, welche Lagebeziehung die beiden Ebenen zueinander haben. Geben Sie im Falle des Schneidens die gemeinsame Schnittgerade an.

a) $E_1:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\\text{[illegible]}\\1\end{pmatrix};\ r,s\in\mathbb{R},$

$E_2:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}\text{[illegible]}\\4\\\text{[illegible]}\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\\text{[illegible]}\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix};\ t,u\in\mathbb{R}$

b) $E_3:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\\text{[illegible]}\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix};\ r,s\in\mathbb{R},$

$E_4:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}+v\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+w\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix};\ t,u\in\mathbb{R}$

Tippkarten (Seite 1)

Station 1, Aufgabe 1: Tippkarte 1	**Station 1, Aufgabe 1: Tippkarte 2**
Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig (kollinear), wenn einer der beiden Vektoren als Vielfaches des anderen dargestellt werden kann: $\vec{a} = r \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{b} = s \cdot \vec{a}$.	Mithilfe der Vektorgleichung $\vec{a} = r \cdot \vec{b},\ r \in \mathbb{R}$ können Sie ein LGS aufstellen.
Station 1, Aufgabe 1: Tippkarte 3	**Station 1, Aufgabe 1: Tippkarte 4**
Sie erhalten ein LGS mit einer Variablen.	Das LGS ist genau dann <u>eindeutig</u> lösbar, wenn sich der gleiche Wert für die Variable aus allen Gleichungen ergibt.
Station 1, Aufgabe 1: Tippkarte 5	**Station 1, Aufgabe 2: Tippkarte 1**
Die Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn das LGS <u>lösbar</u> ist.	Bestimmen Sie die Parameterform der Geradengleichung. Wählen Sie dazu z. B. als Stützvektor den Vektor $\overrightarrow{OA}$ und als Richtungsvektor den Vektor $\overrightarrow{AB}$.
Station 1, Aufgabe 2: Tippkarte 2	**Station 1, Aufgabe 2: Tippkarte 3**
Die Parameterform einer Geradengleichung durch die Punkte A und B lautet: $g_{AB}: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB}$ bzw. $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$	Mithilfe einer Punktprobe stellen Sie fest, ob der Punkt P auf der Geraden g_{AB} liegt.