Ebenengleichungen in Parameterform

von Carlo Vöst

© Nikada/E+/Getty Images

Was sind Ebenen in der analytischen Geometrie? Wie definiert man sie und welche Informationen reichen aus, um sie eindeutig bestimmen zu können? Diese und weitere Fragen über mögliche Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen oder einer Ebene und Gerade behandelt dieser Beitrag ausführlich in Theorie und Praxis. Durch zahlreiche Beispiele und Aufgaben entwickeln die Lernenden ein tiefes Verständnis für die Parameterform der Ebene und Gerade.

VORANSICHT

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek. II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß § 60b UrhG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung in Klassensatzstärke zu vervielfältigen. Jede darüberhinausgehende Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Hinweis zu §§ 60a, b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig.

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und ggf. angefragt.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Irene Dick
Satz: Röser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: Nikada/E+/Getty Images
Lektorat: Mona Hitzenauer

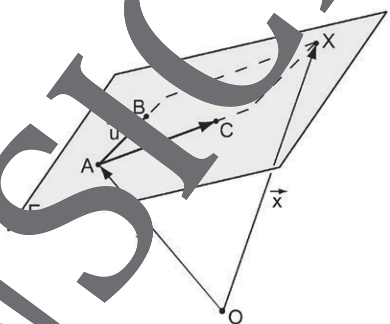
VORANSICHT

Theorie

Eine **Ebene** als geometrisches Objekt ist eine unendliche Punktmenge und kann analytisch erfasst werden durch die Beschreibung der Koordinaten ihrer Punkte.

Geometrisch ist eine Ebene eindeutig bestimmt durch:
- drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen,
- eine Gerade und einen Punkt, der nicht auf der Geraden liegt,
- zwei sich schneidende Geraden,
- zwei echt parallele Geraden.

Analytisch muss also gegeben/berechenbar sein:
- entweder die Koordinaten dreier Punkte (die nicht auf einer Geraden liegen),
- oder die Koordinaten eines Punktes und zwei nicht kollineare (linear unabhängige) Vektoren (Richtungen).



Merke:
Alle Punkte X einer Ebene E (und damit die Ebene E selbst als unendliche Punktmenge) lassen sich durch Angabe des zugehörigen Ortsvektors $\vec{x}$ erfassen. Es gilt:

$$E:\ \vec{x} = \vec{a} + \lambda\left(\vec{b} - \vec{a}\right) + \mu\left(\vec{c} - \vec{a}\right) \quad \text{oder:} \quad E:\ \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

Dabei heißt der Punkt A Stützpunkt oder Aufpunkt und die Vektoren $\vec{u} := \vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{v} := \vec{c} - \vec{a}$ nennt man Richtungsvektoren.
Die erste Gleichung heißt Drei-Punkte-Form der Ebenengleichung und die zweite Gleichung Punkt-Richtungs-Form der Ebenengleichung.
Außerdem sind beide Ebenengleichungen in vektorieller Parameterform geschrieben: Sämtliche Punkte X mit deren (Orts-)Vektoren $\vec{x}$ der Ebene E können mit einem Parameterwertepaar $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.
Die Gleichung einer Ebene in (vektorieller) Parameterform ist nicht eindeutig, weil die Punkte A, B und C beliebig auf E gewählt werden können, solange sie nicht auf einer Geraden liegen.
Ebenengleichungen (in vektorieller Parameterform) ein- und derselben Ebene können sich also sowohl im Stützpunkt als auch in den beiden Richtungsvektoren unterscheiden!

© RAABE 2020

VORANSICHT

Aufgaben

1. Überprüfen Sie jeweils, ob durch die Angaben eine Ebene eindeutig bestimmt ist. Falls ja, stellen Sie die Gleichung der Ebene in (vektorieller) Parameterform auf:

   a) $A\left(1\,\middle|\,-2\,\middle|\,3\right)$, $B\left(-4\,\middle|\,2\,\middle|\,3\right)$, $C\left(-2\,\middle|\,3\,\middle|\,5\right)$;

   b) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$; $A\left(5\,\middle|\,-5\,\middle|\,3\right)$

   c) $g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\0\\7\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$; $g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\10\\8\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

   d) $g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$; $g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}[illegible]\\4\\[illegible]\end{pmatrix}$

   e) $g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$; $g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-0{,}5\\0\\1\end{pmatrix}$

   f) $g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\[illegible]\end{pmatrix}$; $g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$

2. Gegeben ist die Ebene $E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}[illegible]\\-2\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-5\\4\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-3\\5\\2\end{pmatrix}$

   Überprüfen Sie, ob folgende Punkte in der Ebene E liegen:

   a) $A\left([illegible]\,\middle|\,5\,\middle|\,9\right)$,

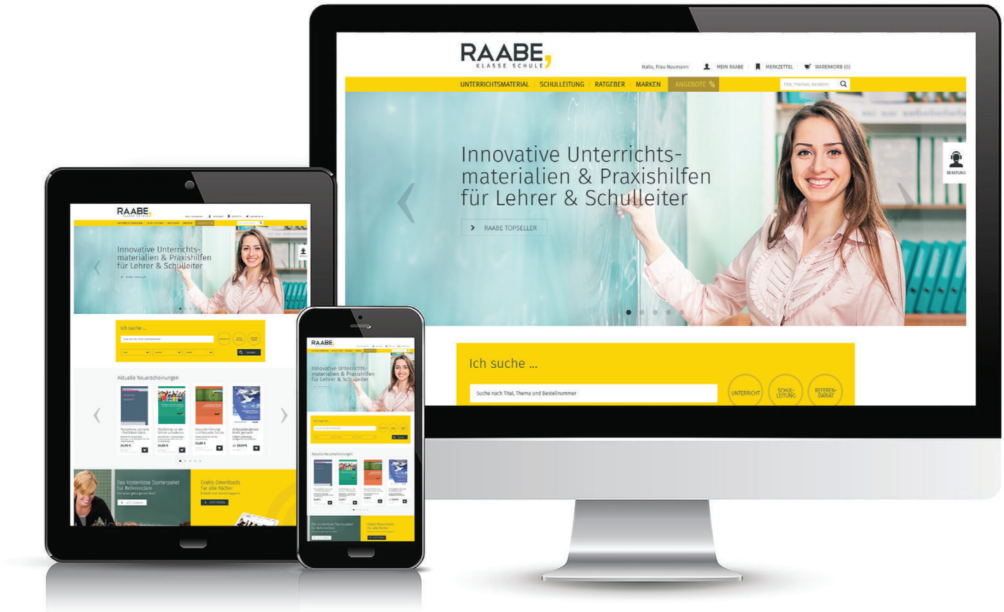
   b) $B\left(1\,\middle|\,-3\,\middle|\,2\right)$,

   c) $C\left(10\,\middle|\,-4\,\middle|\,7\right)$.

© RAABE 2020

RAABE, KLASSE SCHULE

Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de