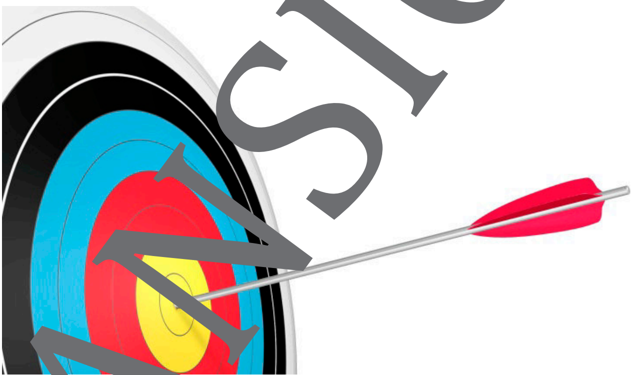
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II



Pfeile und Vektoren

Definitionen und Aufgaben

RAABE KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-[illegible]
Fax +49 7[illegible]60
meinRAABe@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Sc[illegible] Orth
Satz: R[illegible]ser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Dr. Jürgen Leitz
Bild[illegible] Titel: MarsBars/Getty Images Plus/E+
Lektorat: Mona Hitzenauer

Pfeile und Vektoren

Vektoren – geometrisch und algebraisch

In der Abbildung 1 ist die Verschiebung eines Würfels im $\mathbb{R}^3$ veranschaulicht.

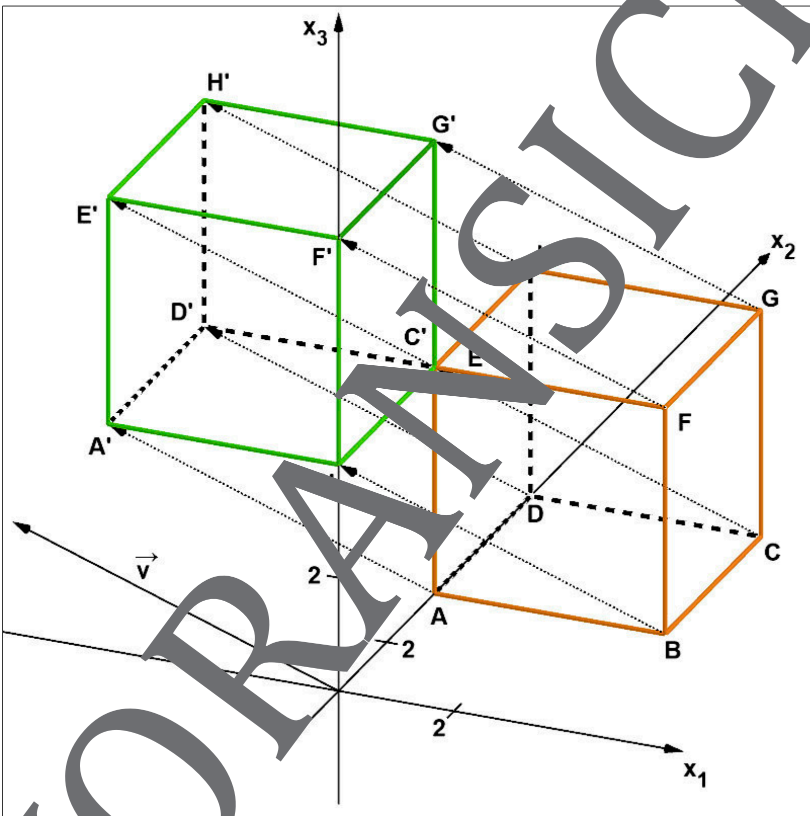


Abb. 1

Vergleichen Sie die einzelnen acht Verschiebungspfeile. Zu welcher Aussage kommen Sie?

Lösung

- Alle Pfeile beschreiben ein- und dieselbe Verschiebung
- Alle Pfeile sind durch zwei Punkte bestimmt (Anfangs- und Endpunkt)
- Alle Pfeile sind zueinander parallel
- Alle Pfeile sind gleich lang
- Alle Pfeile haben dieselbe Richtung (gekennzeichnet durch die Pfeilspitze)

$$\Rightarrow \text{Verschiebungsmatrix } V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \overset{\text{Def}}{:=} \text{Vektor } \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Definition

Ein **Vektor** im $\mathbb{R}^3$ ist ein Zahlentripel der Form $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \mathbf{x_3} \end{pmatrix}$.

x_1, x_2 und x_3 heißen Koordinaten des Vektors.
Sie stellen die Verschiebungseinheiten des Vektors $\vec{v}$ in Richtung der Koordinatenachsen dar.
Alle Pfeile, die parallel zueinander, gleich lang und gleichgerichtet sind, stellen Repräsentanten eines solchen Vektors dar.
Bemerkung: Ein Vektor in der Ebene hat entsprechend nur zwei Koordinaten als Zahlenpaar:
$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Im Nachfolgenden werden Betrachtungen im $\mathbb{R}^3$ vorgenommen.
Da $\mathbb{R}^2$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist, gelten diese auch für $\mathbb{R}^2$. Der Vektor wird durch einen Pfeil gekennzeichnet. Pfeile werden durch ihre Begrenzungspunkte (Anfangs- und Endpunkt) bezeichnet.

In Abb. 1 haben die Pfeile $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ $\overrightarrow{CC'}$,…, $\overrightarrow{HH'}$ jeweils die gleiche Richtung, die gleiche Länge und sind parallel zueinander.

Jeder dieser Pfeile kennzeichnet den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Gegenvektor

entgegengesetzt gerichtet gleich gerichtet

Parallele Pfeile sind gleichgerichtet, wenn die Pfeilspitzen auf derselben Seite sind.

> ***Definition***
>
> Ein Vektor $\vec{u}$ heißt **Gegenvektor** zu einem anderen Vektor $\vec{v}$ genau dann, wenn beide Vektoren gleich lang, parallel zueinander und entgegengesetzt gerichtet sind. In Analogie zu entgegengesetzten rationalen Zahlen (Gegenzahlen) verwendet man auch hier das Minuszeichen („–“) :
>
> Mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ist $\vec{u} = -\vec{v} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$ ein Gegenvektor von $\vec{v}$.

Beispiel:

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist Gegenvektor zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und umgekehrt

⇒ Koordinaten von Gegenvektoren sind entgegengesetzte Zahlen (Gegenzahlen).

Aufgaben

1. a) Geben Sie an, welche der auf dem Quader eingezeichneten Pfeile zum Vektor $\vec{v}$ gehören.

   (1) $\vec{v} = \overrightarrow{HE}$

   (2) $\vec{v} = \overrightarrow{AH}$

   (3) $\vec{v} = \overrightarrow{EA}$

   (4) $\vec{v} = \overrightarrow{GH}$

   (5) $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

   (6) $\vec{v} = \overrightarrow{BD}$

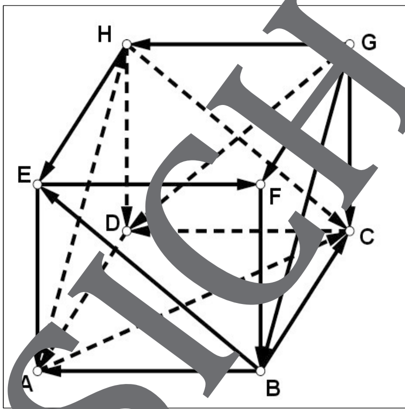


Abb. 5

   b) Begründen Sie, warum die Pfeile $\overrightarrow{BE}$ und $\overrightarrow{HC}$ nicht zum selben Vektor gehören.

2. Zeichnen Sie in den Quader alle Pfeile ein, die zum jeweiligen Vektor gehören.

   a) $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$

   b) $\vec{v} = \overrightarrow{CA}$

   c) $\vec{w} = \overrightarrow{CH}$

   d) $\vec{z} = \overrightarrow{AF}$

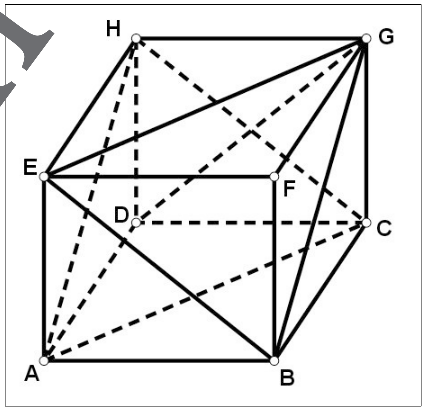


Abb. 6

Kompetenzprofil

- Niveau: einführend
- Fachlicher Bezug: Analytische Geometrie
- Kommunikation: begründen, argumentieren
- Problemlösen: Darstellung verwenden
- Modellierung: -
- Medien: Farbfolie
- Methode: Einzel-, Partnerarbeit
- Inhalt in Stichworten: Pfeile und Vektoren, Gegenvektor, Punkte und Ortsvektor, Betrag (Länge) eines Vektors

Autor: Dr. Jürgen Leitz

Lösung

1. a) (1) $\overrightarrow{HE}$, $\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{DA}$

   (2) $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{BG}$

   (3) $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{HD}$

   (4) $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$

   (5) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EG}$

   (6) **keiner**

   b) Die Ve[illegible]ren $\overrightarrow{B\ldots}$ [illegible] sind zwar parallel und gleich lang, haben aber verschieden[illegible]er entgegengesetzte Richtungen (sind Gegenvektoren).

2.

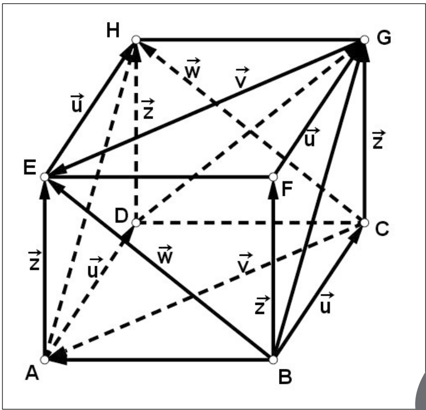


Abb. 7

3. a) $A(-3|2) \Rightarrow \quad \overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Ortsvektor von Punkt A

$B(1|-4) \Rightarrow \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ als Ortsvektor von Punkt B

$C(1|0|-2) \Rightarrow \quad \overrightarrow{OC} = \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ als Ortsvektor von Punkt C

$D(-3|5|0) \Rightarrow \quad \overrightarrow{OD} = \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Ortsvektor von Punkt D