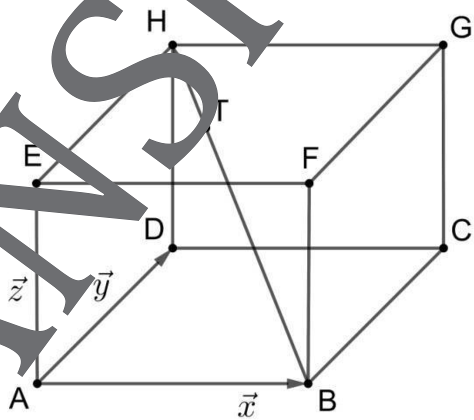
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II



Übungsaufgaben zur Vektorrechnung

Linear unabhängige Vektoren und Teilverhältnisse

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABe@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Schirin Orth
Bildnachweis Titel: Schirin Orth
Lektorat: Dipl.-Math. Dr. rer. Nat. Yvonne Raden

Übungsaufgaben zur Vektorrechnung

Linear unabhängige Vektoren und Teilverhältnisse

1. Die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ spannen das Parallelog mm A CD f. Der Punkt E teilt die Strecke [DC] im Verhältnis 1 : 3. In wel Verhältn s teilt der Schnittpunkt S der Strecke [BE] mit der Diago en [AC] ese Diagonale?

2. In einem Dreieck ABC mit $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ teil r Punkt T ie Seite [AC] im Verhältnis $\left|\overrightarrow{AT}\right| : \left|\overrightarrow{TC}\right| = 3 : 4$. Berec n Sie da rh nis, in dem die vom Punkt C ausgehende Seitenhalbierende [ ] die Strecke [BT] teilt.

3. Der Punkt T teilt wie in der nebenstehe den Skizze die Strecke [BC] im Verhält nis 3 : 2. Berechnen Sie das Verhä nis, in dem die Seitenhalbierende [BM] die re- cke [AT] teilt.

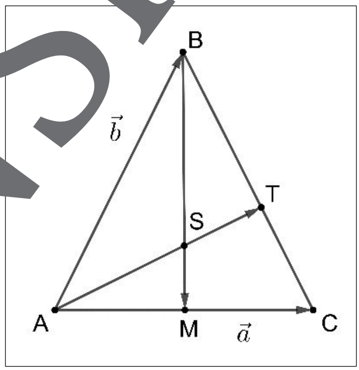


Abb. 1

4. Gegeben ist ei nes Viereck ABCD mit $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ $\vec{b}$. Für die Diagonale [AC] gilt: $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

   a) eigen Sie, ss das Viereck ABCD ein Trapez ist.

   b) In hem erhältnis teilen sich die beiden Diagonalen des Trapezes ABCD?

Rechnen mit Vektoren

1. In einem Spat ABCDEFGH mit $\overrightarrow{AB} = \vec{x}, \overrightarrow{AD} = \vec{y}, \overrightarrow{AE} = \vec{z}$ liegt auf der Diagonalen [BH] der Punkt T so, dass $\overrightarrow{BT} = 3 \cdot \overrightarrow{TH}$ gilt. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ den Vektor $\overrightarrow{AT}$.

2. In einem Spat ABCDEFGH mit $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AE} = \vec{c}$ gilt für einen Punkt P auf der Diagonalen [AG] die Gleichung $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$. M ist der Mittelpunkt der Strecke [EH]. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ den Vektor $\overrightarrow{MP}$.

3. In einem Spat ABCDEFGH mit $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AE} = \vec{c}$ gilt für die Punkte C_1 bzw. W: $\overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{FW} = \frac{4}{5}\overrightarrow{FG}$. Berechnen Sie die Vektoren $\overrightarrow{C_1W}$ und $\overrightarrow{BM}$, wenn M der Mittelpunkt der Strecke $[C_1W]$ ist.

4. Ein Spat ABCDEFGH ist durch die Vektoren

   $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben. Berechnen Sie

   die Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{FD}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{GM}$, wenn M der Mittelpunkt der Kante [AB] ist.

5. Die vier Punkte A, B, C, D bilden ein Parallelogramm. Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt M der Geraden g = AC und h = BD der Mittelpunkt der Diagonalen [AC] und [BD] ist.

6. Im Dreieck ABC sind M_1, M_2, M_3 die Seitenmitten. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes S' des Dreiecks $M_1M_2M_3$. Was fällt auf?

Kompetenzprofil

- Niveau: einführend
- Fachlicher Bezug: Analytische Geometrie
- Kommunikation: argumentieren
- Problemlösen: Probleme erkennen und Lösungen finden
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Einzelarbeit, Hausaufgabe
- Inhalt in Stichworten: Prinzip der linearen Unabhängigkeit von Vektoren, Rechnen mit Vektoren im Raum und in der Ebene

Autor: Alfred Müller

Lösung

Linear unabhängige Vektoren und Teilverhältnisse

1. $\overrightarrow{AB} = \vec{a},\ \overrightarrow{AD} = \vec{b},\ \overrightarrow{CE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD} = -\frac{3}{4}\vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{BE} = \vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a},\ \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

   Geschlossene Vektorkette:

   $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SA} = \vec{0}$

   $\vec{a} + m \cdot \left(\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}\right) - k \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \vec{0}$

   $\vec{a} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}m - k\right) + \vec{b} \cdot (m - k) = \vec{0}$

   Da $\vec{a},\ \vec{b}$ linear unabhängig, folgt:

   1. $1 - \frac{3}{4}m - k = 0$

   2. $m - k = 0$

   aus 2: $m = k$

   1: $1 - \frac{7}{4}m = 0 \Rightarrow m = k = \frac{4}{7}$

   $\Rightarrow$ Teilverhältnis: $\left|\overrightarrow{AS}\right| : \left|\overrightarrow{SC}\right| = 4 : 3$

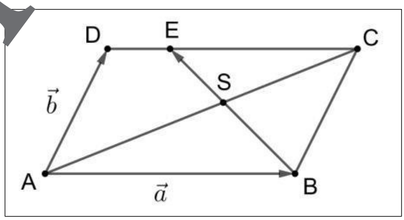


Abb. 2

2. $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AC}=\vec{b},\ \overrightarrow{AT}=\frac{3}{4}\vec{b},\ \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{a},$

$\overrightarrow{BC}=-\vec{a}+\vec{b},$

$\overrightarrow{CM}=-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a},\ \ \overrightarrow{TB}=-\frac{3}{7}\vec{b}+\vec{a}$

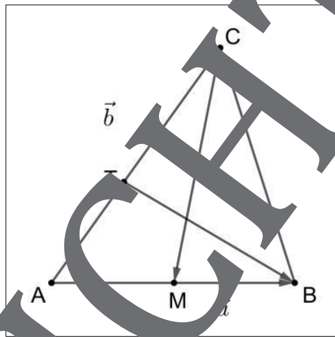


Abb. [illegible]

Geschlossene Vektorkette:

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{TA}=\vec{0}$

$\frac{1}{2}\vec{a}-k\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)-m\cdot\left(-\frac{3}{7}\vec{b}+\vec{a}\right)-\frac{3}{7}\vec{b}=\vec{0}$

$\vec{a}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k-m\right)+\vec{b}\cdot\left(k+\frac{3}{7}m-\frac{3}{7}\right)=\vec{0}$

Da die Vektoren $\vec{a},\ \vec{b}$ linear unabhängi[illegible] sind, [illegible]

1. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k-m=0$

2. $-\frac{3}{7}+k+\frac{3}{7}m=0$

1+2: $\frac{4}{7}-\frac{11}{7}m=0\Rightarrow$ m [illegible]

in 1: $\frac{1}{2}-\frac{4}{11}$ [illegible] $\Rightarrow k=$ [illegible]

$\Rightarrow$ Teilver[illegible]isse: [illegible] : $|\overrightarrow{ST}|=7:4,\ \ |\overrightarrow{CS}|:|\overrightarrow{SM}|=8:3$

3. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$

$\overrightarrow{CT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CB} = \frac{2}{5}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AT} = \vec{a} + \frac{2}{5}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

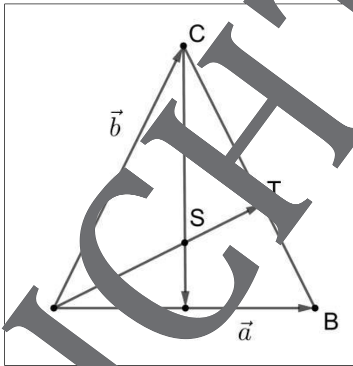


Abb. 4

Geschlossene Vektorkette:

$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$

$k \cdot \left(\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right) + m \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) - \frac{1}{2}\vec{a} = \vec{0}$

$\vec{a} \cdot \left(\frac{3}{5}k + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\right) + \vec{b} \cdot \left(\frac{2}{5}k - m\right) = \vec{0}$

Da die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ linear unabhängig sind, folgt:

1. $\frac{3}{5}k + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} = 0$

2. $\frac{2}{5}k - m = 0$

aus 2: $m = \frac{2}{5}k$ in 1: $\frac{4}{5}k - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow k = \frac{5}{8} \wedge m = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ Teilverhältnisse: $\left|\overrightarrow{AS}\right| : \left|\overrightarrow{ST}\right| = 5:3 \wedge \left|\overrightarrow{BS}\right| : \left|\overrightarrow{SM}\right| = 3:1$

Rechnen mit Vektoren

1. $\overrightarrow{BT} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BH} = \frac{3}{4}(-\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$

$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT}$

$= \vec{x} - \frac{3}{4}\vec{x} + \frac{3}{4}\vec{y} + \frac{3}{4}\vec{z}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AT} = \frac{1}{4}\vec{x} + \frac{3}{4}\vec{y} + \frac{3}{4}\vec{z}$

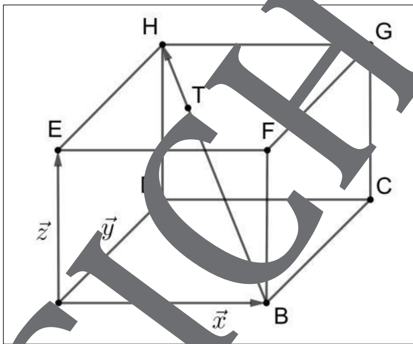


Abb. 1

2. $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AP}$

$= -\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} + \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$

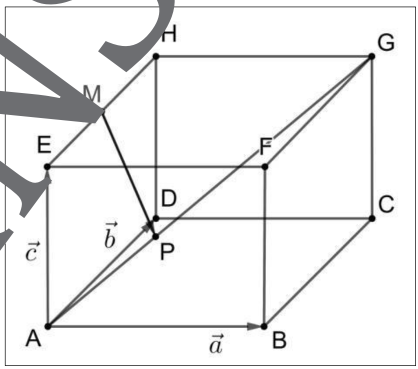


Abb. 2