UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II

Platonische Körper im Alltag – Teil 1

Kirchkreuz auf Oktaeder

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Dr. Jürgen Leitz
Bildnachweis Titel: A. Marjanović
Korrektorat: Mona Hitzenauer

Platonische Körper im Alltag – Teil 1

Die Regelmäßigkeit und die Gesetzmäßigkeit des Aufbaus der platonischen Körper machen diese auf vielerlei Art für den Menschen interessant. So finden wir sie im Alltag u. a. als Bauwerke (s. Abb. 1), als Schmuckgegenstände, als Kunstwerke und als Bausteine in der Chemie wieder.
Grundlegendes Wissen zu platonischen Körpern wurde bereits in einem Beitrag dargestellt (siehe T.2.10). Hier und in einem weiteren Beitrag geht es um die Anwendung platonischer Körper. Eine zusammenfassende Formelsammlung zu platonischen Körpern finden Sie im Archiv.

Abb. 1

Mathematische Modellierung des Kirchkreuzes auf dem Oktaeder

Im *Kirchenforum Bochum* (Abb. 1) befindet sich ein Kreuz auf einem Oktaeder. Für Berechnungen wird das Oktaeder **mathematisch modelliert** in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eingebunden.

Der Eckpunkt A liegt im Koordinatenursprung. Das Oktaeder hat eine Kantenlänge von 3,30 m. Die Spitze der Haltestange des Kreuzes liegt in Richtung der positiven x_3-Achse über der Spitze des Oktaeders und ragt 3,00 m über dem Oktaeder hinaus

Das Andreaskreuz befindet sich 1,80 m über dem Oktaeder. Die Vektoren der beiden Kreuzstangen $\overline{HJ}$ und $\overline{IK}$ haben eine Länge von 1,2 m. Sie verlaufen parallel zu den Vektoren der Diagonalstreben $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$.

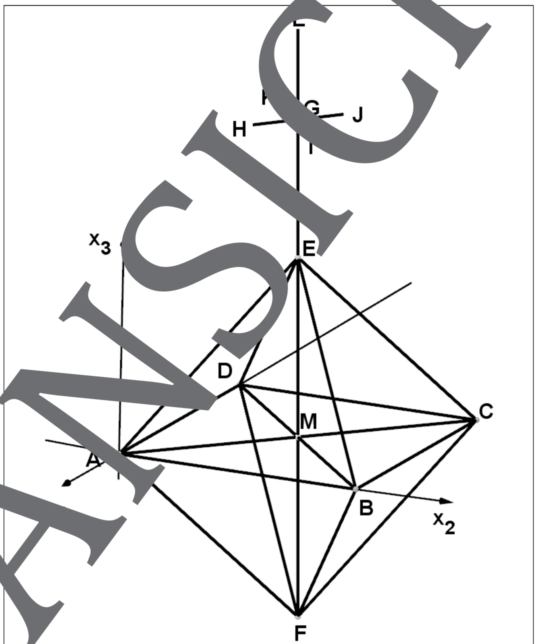


Abb. 2

Bemerkung: Die Maßangaben stellen Näherungswerte dar. Legt man auf allen drei Koordinatenachsen die Einheit Meter fest, so können mithilfe der Maßangaben die Koordinaten der Eckpunkte bestimmt und weitere Berechnungen vorgenommen werden.

1. a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K und L des Kantengerüstes.

   b) Weisen Sie vektoriell nach, dass die Kantenlänge des Oktaeders [illegible] m beträgt.

   c) Bestätigen Sie mithilfe der Vektorrechnung, dass die beiden Kreuzstangen eine Länge von 1,20 m haben.

   d) Zeigen Sie, dass die beiden Kreuzstangen orthogonal zueinander sind.

   e) Berechnen Sie die Höhe des Oktaeders.

   f) Bestimmen Sie vektoriell die Oberfläche des Oktaeders.

   g) Berechnen Sie mithilfe der Vektorrechnung das Volumen des Oktaeders.

   h) Kontrollieren Sie das Ergebnis aus den Teilaufgaben e) bis g) mithilfe der Formelsammlung.

2. a) Weisen Sie vektoriell nach, dass der Neigungswinkel der Kanten gegenüber der Mittelebene 45° beträgt.

   b) Zeigen Sie, dass der Neigungswinkel der Kanten gegenüber der Mittelebene unabhängig von der Kantenlänge a und damit für alle Oktaeder gleich 45° beträgt.

   c) Berechnen Sie den Flächenwinkel (Winkel zwischen zwei Seitenflächen) des Oktaeders.

   d) Vergleichen Sie das Ergebnis von Teilaufgabe c) mit dem angegebenen Winkel in der Formelsammlung.

   e) Jeweils zwei Seitenflächen des Oktaeders sind parallel zueinander. Weisen Sie diese Eigenschaft für die beiden Seitenflächen AFD und BCE nach.

   f) Der Abstand zweier paralleler Seitenflächen wird als die „Dicke des Oktaeders" bezeichnet.
   Berechnen Sie die Dicke des Oktaeders.

Kompetenzprofil

- Niveau: weiterführend
- Fachlicher Bezug: –
- Kommunikation: begründen, argumentieren, vergleichen
- Problemlösen: Darstellungen verwenden, Probleme erkunden, Lösungen berechnen, Ergebnisse reflektieren
- Modellierung: –
- Medien: Formelsammlung, GeoGebra
- Methode: Einzel-, Partner- und Gruppenarbeit
- Inhalt in Stichworten: Länge, Abstand Punkt/Punkt, Abstand Ebene/Ebene, Mittelpunkt, Schwerpunkt, Schnittwinkel, Schnitt Gerade/Gerade, lineares Gleichungssystem (LGS), gleichseitiges Dreieck, Oktaeder, Oberfläche, Normalenvektor, Einheitsvektor, Skalar-, Vektor- und Spatprodukt

Autor: Dr. Jürgen Leitz

Lösung

1. a) Mithilfe der Abb. 2, den beiden Angaben
„Eckpunkt A liegt im Koordinatenursprung“ und
„Das Oktaeder hat eine Kantenlänge von 3,30 m“
können die Koordinaten der anderen Eckpunkte bestimmt werden:

$A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(0 \mid 3,3 \mid 0)$

C liegt hinter B $\Rightarrow$ $C(-3,3 \mid 3,3 \mid 0)$

D liegt hinter A $\Rightarrow$ $D(-3,3 \mid 0 \mid 0)$

Die Punkte E und F liegen jeweils mit gleichem Abstand über bzw. unter dem Schwerpunkt (Mittelpunkt) M des Oktaeders.
Für den Mittelpunkt M gilt:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + 0,5 \cdot \overrightarrow{AC} \quad \text{bzw.} \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OD} + 0,5 \cdot \overrightarrow{DB}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} -3,3 \\ 3,3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3,3 \\ 3,3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,65 \\ 1,65 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bzw.

$$\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}-3,3\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\3,3\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3,3\\0\\0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-3,3\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}3,3\\3,3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1,65\\1,65\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow\ M\left(-1,65\middle|1,65\middle|0\right)$

Der Betrag der x_3-Koordinate der Punkte E und F ist dann gleich dem Abstand vom Punkt M. Es ist:

$$\left|\overrightarrow{FM}\right|=\left|\overrightarrow{AM}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1,65\\1,65\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1,65\\1,65\\0\end{pmatrix}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{FM}\right|=\sqrt{(-1,65)^2+1,65^2+0}=\sqrt{2\cdot 1,65^2}=1,65\cdot\sqrt{2}\approx 2,33$$

Somit lauten die Koordinaten der Punkte E und F:

$E\left(-1,65\,\middle|\,1,65\,\middle|\,1,65\cdot\sqrt{2}\right)$

$F\left(-1,65\,\middle|\,1,65\,\middle|\,-1,65\cdot\sqrt{2}\right)$

Punkt G liegt 1,80 m über E.

$\Rightarrow\ G\left(-1,65\,\middle|\,1,65\,\middle|\,4,13\right)$

Punkt L liegt 3,00 m über E

$\Rightarrow\ L\left(-1,65\,\middle|\,1,65\,\middle|\,5,33\right)$

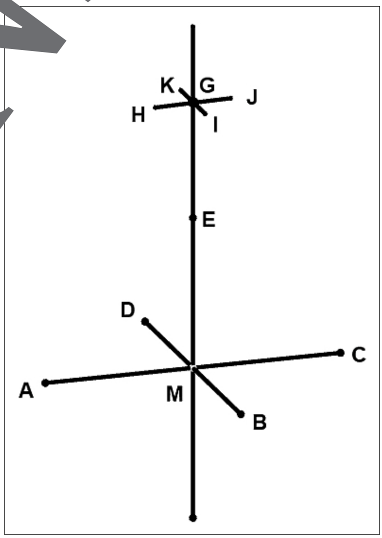


Abb. 5

Es sind noch die Punkte H, I, J und K des Kreuzes zu bestimmen. Nach Aufgabenstellung verlaufen die Vektoren der beiden Kreuzstangen $\overline{HJ}$ und $\overline{IK}$ parallel zu den Vektoren der Diagonalstreben $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$.

Die Kreuzstangen haben eine Länge von jeweils 1,20 m.

Mithilfe der Abb. 5 können die Koordinaten der Endpunkte des Kreuzes bestimmt werden.

Zum Vektor $\overrightarrow{MA}$ wird sein Einheitsvektor bestimmt:

Mit $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1,65 \\ 1,65 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,65 \\ -1,65 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist

$\vec{e}_{\overline{MA}} = \frac{1}{\sqrt{1,65^2 + (-1,65)^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1,65 \\ -1,65 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Einheitsvektor von

$\overrightarrow{MA}$.

Somit gilt für den Punkt H:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OG} + 0,6 \cdot \vec{e}_{\overline{MA}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1,65 \\ 1,65 \\ 4,13 \end{pmatrix} + 0,6 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,226 \\ 1,226 \\ 4,13 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad H(-1,226|1,226|4,13)$

Für den Punkt J gilt:

$$\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OG} - 0,6 \cdot \vec{e}_{\overline{MA}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1,65 \\ 1,65 \\ 4,13 \end{pmatrix} - 0,6 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,07 \\ 2,07 \\ 4,13 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad J(-2,07|2,07|4,13)$

Mit $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} -3,3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1,65 \\ 1,65 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,65 \\ -1,65 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist

$$\vec{e}_{\overrightarrow{MD}} = \frac{1}{\sqrt{(-1,65)^2 + 1,65^2}} \cdot \begin{pmatrix} -1,65 \\ -1,65 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein Einheitsvektor von $\overrightarrow{MD}$.

Somit gilt für den Punkt K:

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OG} + 0,6 \cdot \vec{e}_{\overrightarrow{MD}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1,65 \\ 1,65 \\ 4,13 \end{pmatrix} + 0,6 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,07 \\ 1,226 \\ 4,13 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad K\left(-2,07 \,\middle|\, 1,226 \,\middle|\, 4,13\right)$

Für den Punkt I gilt:

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OG} - 0,6 \cdot \vec{e}_{\overrightarrow{MD}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1,65 \\ 1,65 \\ 4,13 \end{pmatrix} - 0,6 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,226 \\ 2,07 \\ 4,13 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad I\left(-1,226 \,\middle|\, 2,07 \,\middle|\, 4,13\right)$

c)

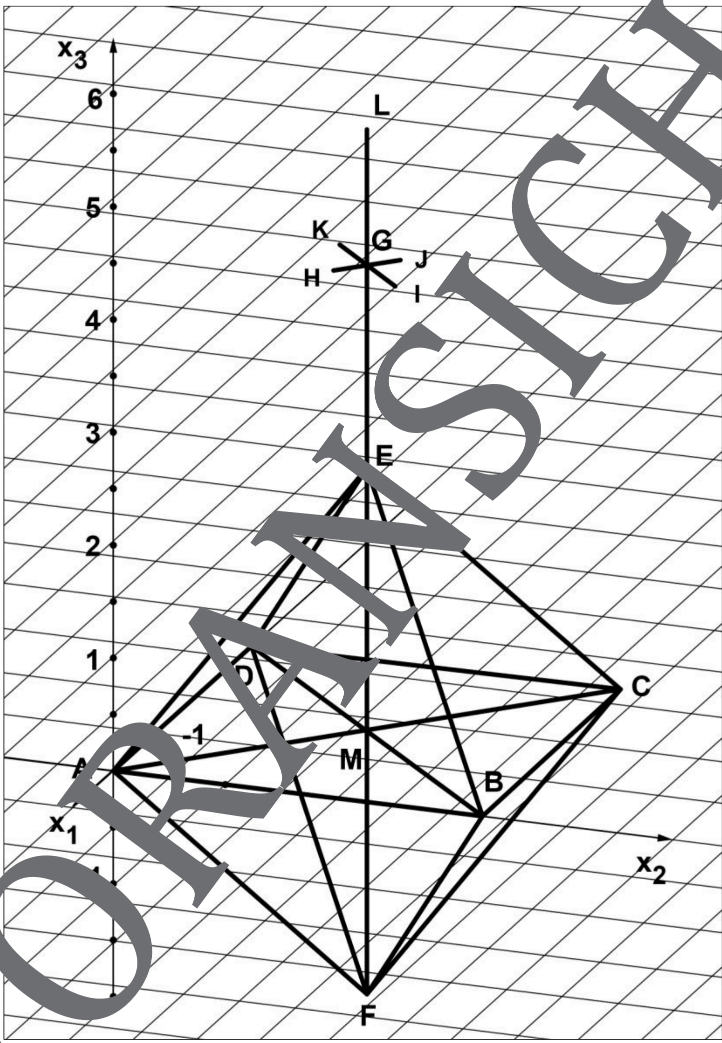
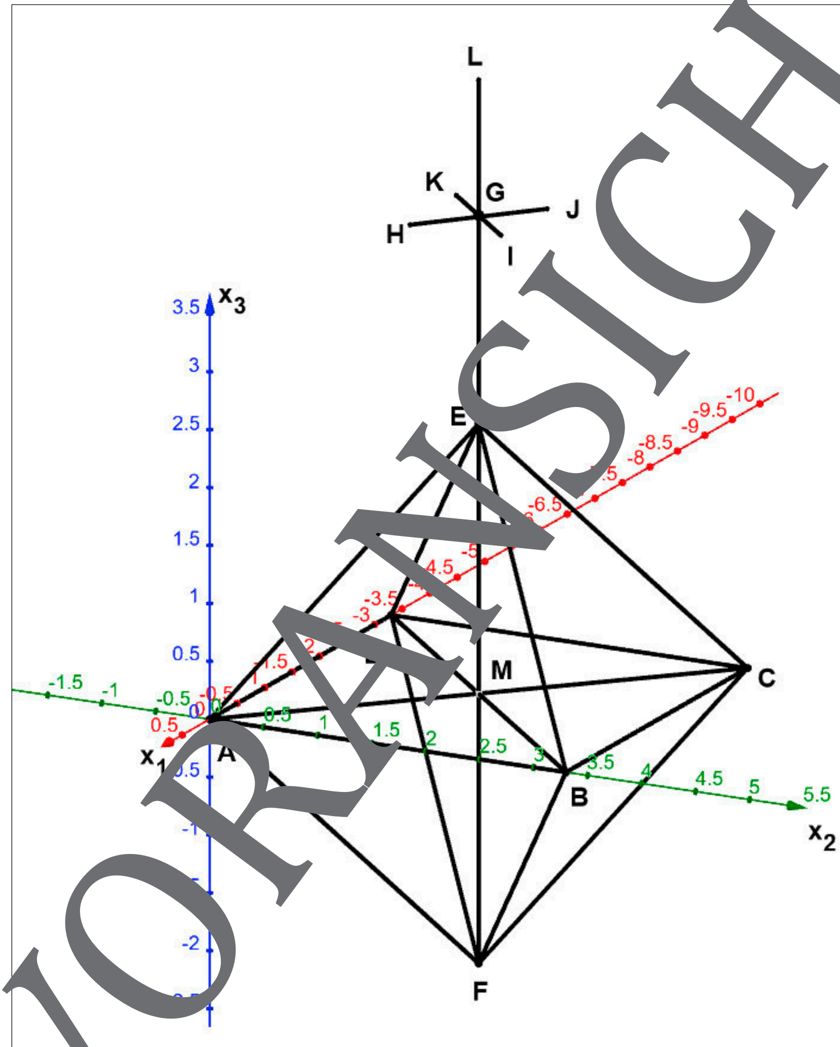


Abb. 8

Zusatzaufgabe



RAABE
KLASSE SCHULE

Der RAABE Webshop:
Schnell, übersichtlich, sicher!

Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de