UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II

Squash und die Analytische Geometrie

Reflexionsgesetze und Strahlensätze

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der [illegible] Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: [illegible]
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Dr. Wolfgang Zettlmeier
Bildnachweis Titel: andresr/Getty Images Plus/E+
Lektorat: Christin Wollert

Squash und die Analytische Geometrie

Squash entstand um 1850 in England. Es ist ein dem Tennis ähnliches Ballspiel, eine Hallentennisart. Gespielt wird mit einem 30 g schweren Vollgummiball (3 cm Durchmesser) in einem abgeschlossenen Raum. Mit einem Tennisschläger wird der Ball, aber nicht wie beim Tennis über ein Netz, sondern an eine Wand zum gegnerischen Spieler geschlagen. D. h. Squash kann als Einzel- oder Doppelspiel durchgeführt werden.
Die Wände des Raumes sind wie folgt durch Linien in einzelnen Felder aufgeteilt:

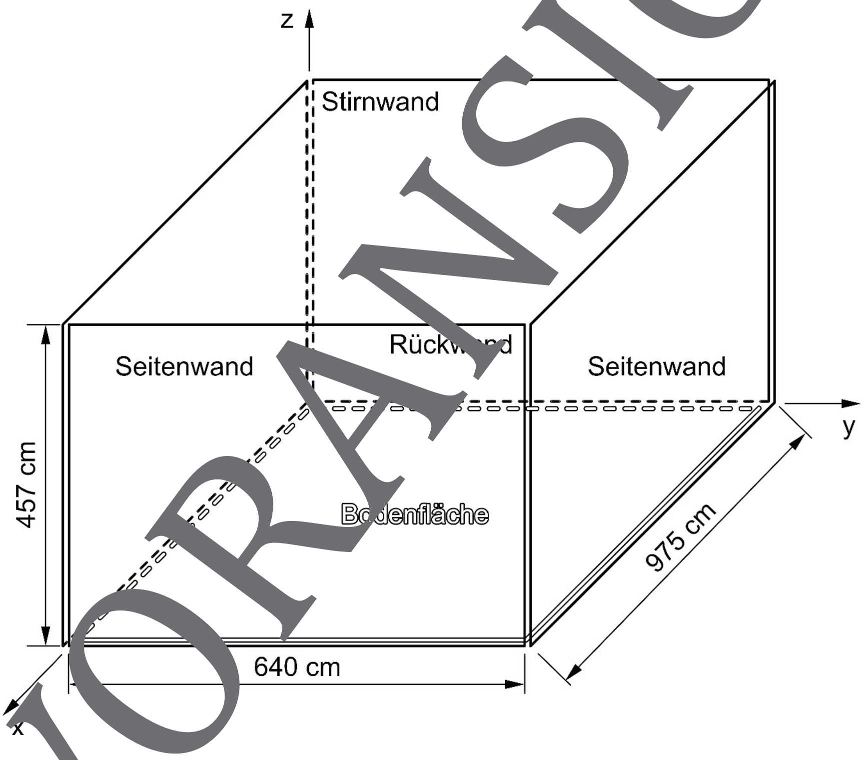

Abb. 1

Bodenfläche Angaben in cm

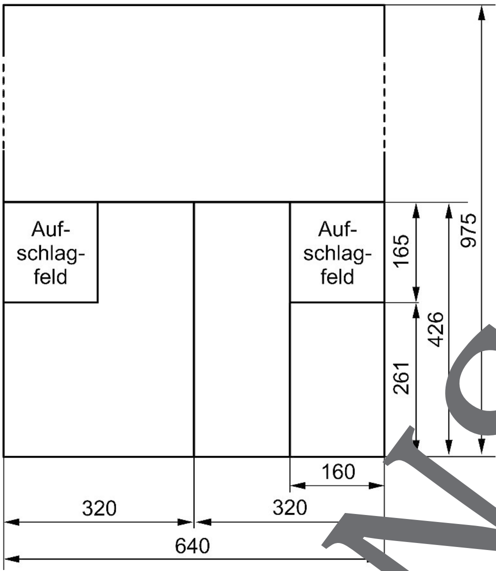

Abb. 2

Stirnwand Angaben in cm

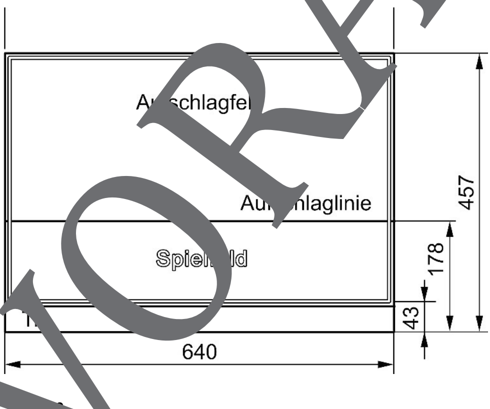

Abb. 3

Spielregeln

Der Aufschlag wird vom rechten bzw. vom linken Aufschlagfeld der Bodenfläche in Richtung Stirnwand ausgeführt, so dass der Ball im Aufschlagfeld (in der Höhe 170 – 457 cm) der Stirnwand auftrifft.
Nach dem Auftreffen auf die Stirnwand kann der Ball das Spielfeld der Seitenwand oder das linke bzw. rechte kleine Spielfeld der Bodenfläche (320 x 426 cm) berühren, muss aber nach maximal **einer** Bodenberührung vom gegnerischen Spieler oder vom aufgeschlagenen Spieler (beim Einzelspiel) gespielt werden.
Auch im weiteren Spielverlauf darf der Ball die Stirnwand **nicht** unterhalb der Tin-Linie (43 cm vom Boden entfernt) berühren. Schlägt ein Spieler den Ball in „Aus“, erhält der gegnerische Spieler einen Punkt. Gespielt wird bei Männern bis zu 15, bei Frauen bis zu 11 Punkten.

Hinweis: Vereinfacht und idealisiert, besteht theoretisch die Möglichkeit, die Bewegung der Kugel beim Billard auf die Bewegung des Balls beim Squash zu übertragen; d.h. die Bewegung in der Ebene auf eine Bewegung im Raum zu übertragen. Um dabei die Bewegung des Squashballs nicht als Bewegung nach einem elastischen Stoß zu betrachten, ist es notwendig, den Ball (wie auch die Billardkugel) als starren Körper anzunehmen. Außerdem muss bei der Bewegung des Balls die Erdanziehung vernachlässigt werden.
Zusammenfassend wird also angenommen, dass die Bewegung des Squashballs dem Licht, d. h. dem Reflexionsgesetz der Optik folgt.

Für den Fall, dass der Ball auf eine Koordinatenebene trifft, gilt folgender Zusammenhang:

$$\left.\begin{array}{r} P_0 - \text{Punkt} \\ \overrightarrow{OP_0} - \text{Ortsvektor} \\ \vec{a};\vec{b} - \text{Richtungsvektoren} \end{array}\right\} \text{der Koordinatenebene}$$

$r;\, s$ – Parameter

$\mathbb{E}: \vec{x} = \overrightarrow{OP_0} + r\vec{a} + s\vec{b}$

Reflexion des Balls an der Ebene $\mathbb{E}$:

$\vec{d} = \vec{c} - 2e \cdot \vec{n}$

$\vec{c}$ – Richtungsvektor **vor** der Reflexion

$\vec{d}$ – Richtungsvektor **nach** der Reflexion

$\vec{n}$ – Normalenvektor der Ebene $\mathbb{E}$

$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

$e = \vec{n} \circ \vec{c}$

Reflexion an der x-y-Ebene (Bodenfläche)

$A\left(2 \mid 1 \mid 4\right);\ B\left(1 \mid 3 \mid 6\right)$

Ballbewegung **vor** der Reflexion:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

g trifft auf $\mathbb{E}$:

$2 - t = 1 + r$

$1 + 2t = 1 + s$

$4 + 2t = 0$

$\rightarrow t = -2; r = 3; s = -4$

$\rightarrow$ Auftreffpunkt S $\left(4 \mid -3 \mid 0\right)$

Ballbewegung **nach** der Reflexion:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Reflexion an der y-z-Ebene (Stirnwand)

$A\,(2|1|4); B\,(1|3|6)$

Ballbewegung **vor** der Reflexion:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

g trifft auf $\mathbb{E}$ [illegible]

$2 - t = 0$

$1 + 2t = $ [illegible]

$4 + 2t = 1 + s$

$\rightarrow t =$ [illegible]$; r = 4; s = 7$

[illegible] Auftre[illegible]unkt S [illegible] $(0 \mid 5 \mid 8)$

Aufgaben

Hinweis: Für alle Aufgaben gilt: Der Koordinatenursprung des kartesischen Koordinatensystems befindet sich in der linken hinteren Ecke der Bodenfläche.

1. Der Aufschlag erfolgt von Punkt P (549 | 560 | z) parallel zur Seitenwand. Der Ball soll ohne weitere Spieleraktivität die Stirnwand im Aufschlagfeld (Punkt Q) und anschließend die Bodenfläche im Spielfeld (Punkt R) berühren. Berechnen Sie die dafür notwendige Mindesthöhe des Punktes P.
   Unter welchem Tiefenwinkel muss der Ball abgeschlagen werden?
   Geben Sie die Koordinaten der Punkte Q und R an.
   Weisen Sie die Ergebnisse durch Kontrolle nach.

2. Der Ball wird über dem Mittelpunkt M des rechten Aufschlagfeldes der Bodenfläche in der Höhe von 220 cm parallel zur Seitenwand mit einem Tiefenwinkel von 3,5° abgeschlagen. Berührt der Ball das Aufschlagfeld der Stirnwand? Nach dem Aufschlag erfolgt keine weitere Aktivität des Spielers. Wo trifft der Ball auf die Rückwand?

3. Der Aufschlag erfolgt von Punkt P (700 | 510 | 238) parallel zur Seitenwand (x-z-Ebene) so, dass er die untere Begrenzung des Aufschlagfeldes der Stirnwand (die Aufschlaglinie in der Höhe 178 cm) berührt.
   Unter welchem Tiefenwinkel muss der Aufschlag erfolgen?
   Danach trifft der Ball ohne weiteren Einfluss des Spielers auf die Bodenfläche <u>oder</u> die Rückwand.
   Bestimmen Sie den entsprechenden Auftreffpunkt.

4. Der Ball wird vom Punkt P (600 | 140| 210) parallel zur Seitenwand in Richtung Stirnwand geschlagen. Nach der Reflexion an der Stirnwand soll der Ball im Punkt T (875 | 140 | 140) auf den Schläger des Spielers treffen. Berechnen Sie den Reflexionspunkt.

5. Der Aufschlag erfolgt von Punkt P (625 | 90 | 200). Der Ball soll nach Berührung der Stirnwand auf den Schläger des Spielers im Punkt R (825 | 500 | 179) auftreffen.
   Berechnen Sie die Koordinaten des dazu notwendigen Berührungspunktes Q der Stirnwand.

6. Der Ball wird von Punkt P (625 | 100 | 210) in Richtung des Punktes Q (0 | 340 | 190) geschlagen.
   Bestimmen Sie, welcher Punkt der Begrenzungswände nach Berührung der Stirnwand ohne weitere Einwirkung eines Spielers als nächstes berührt wird.
   Stellen Sie den Bewegungsablauf räumlich dar.
   Weisen Sie rechnerisch nach, dass nach der Berührung im Punkt Q ein Auftreffen des Balls auf der Bodenfläche und der linken Begrenzungswand nicht möglich ist.

7. Vom Punkt P (590 | 610 | 225) erfolgt der Abschlag des Balls in Richtung Punkt Q (0 | 160 | 180).
   Berechnen Sie die nach Punkt Q folgenden Wand- bzw. Bodenberührungen des Balls für den Fall, dass nach dem Abschlag kein Spieler aktiv wird.
   Der Ball berührt jede Seitenwand, die Stirn- und die Rückwand jeweils höchstens einmal.

8. Der Abschlag des Balls erfolgt vom Punkt P (68[illegible]|[illegible]20|220) in Richtung des Vektors $\vec{a}\begin{pmatrix}-40\\20\\z\end{pmatrix}$.
   Bestimmen Sie die Grenzen der z-Koordinate des Vektors $\vec{a}$ so, dass der Ball die Stirnwand im Aufschlagfeld berührt.

9. Der Ball wird vom Punkt P ([illegible]00 | 100 | 180) in Richtung des Punktes Q (0 | 400 | [illegible]40) der Stirnwand geschlagen.
   Wo trifft der Ball nach der Reflexion die Boden- bzw. eine Wandfläche?
   Bleibt der Ball ohne weitere Spieleraktivität im Spiel?

10. Der Ball wird von Punkt P (705 | 550 | 180) in Richtung des Vektors $\vec{a}\begin{pmatrix}-300\\-[illegible]0\\30\end{pmatrix}$ geschlagen.
    Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, an dem der Ball erstmals eine Wand- bzw. Bodenfläche außerhalb des Spielfeldes berührt.

Kompetenzprofil

- Niveau: anwendend weiterführend
- Fachlicher Bezug: Analytische Geometrie, Physik
- Kommunikation: vermuten, vergleichen, darstellen, diskutieren, math. Analogien erkennen, kontrollieren
- Problemlösen: Problem erkunden, Wissen reproduzieren, Anwendung bekannter Formeln, Verfahren und Zusammenhänge, math. log. Denken entwickeln, Vorstellungsvermögen schulen, Lösungsstrategie erarbeiten, Berechnungen
- Modellierung: Realisierung in der Sporthalle
- Medien: Computersimulation; CAS
- Methode: Problemdiskussion, Anwendung, Reaktivierung, Übung, Übertragung auf neue Sachverhalte, Einzel-; Partner-; Kleingruppen-; Zirkelarbeit, Simulation, Eigenaktivität und -kreativität fördern,
- Inhalt in Stichworten: Reflexion an einer Koordinatenebene, Reflexionsgesetz, Trigonometrische Funktion, Winkel, Vektorielle Geradengleichung, Richtungsvektor, Berührungspunkt, Gleichungssystem, Parameter, Darstellung Ebene/Raum, Strahlensatz, Lineare Funktion

Autor: Wolfgang Lübbe

Lösung

1.

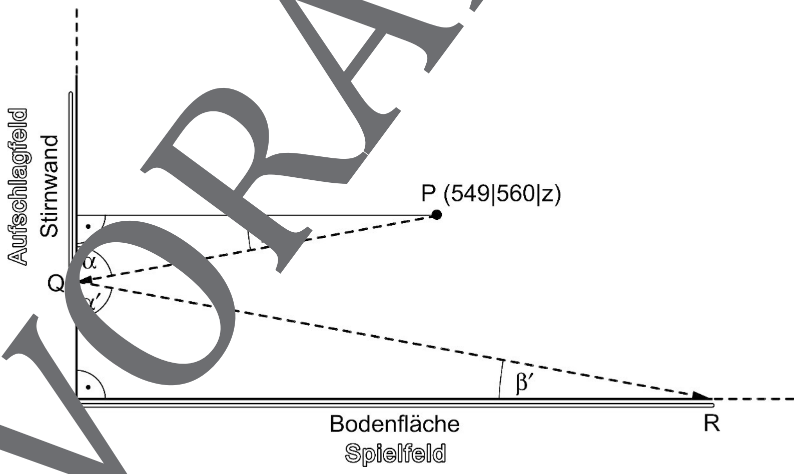

Abb. 6

$\alpha = \alpha' \rightarrow \tan\alpha = \tan\alpha'$

$\tan\alpha = \dfrac{549}{z-178}$

$\tan\alpha' = \dfrac{975}{178}$

$$\begin{aligned} \frac{549}{z-178} &= \frac{975}{178} \\ 549 \cdot 178 &= 975 \cdot (z-178) \\ 97722 &= 975z - 173550 \\ 271272 &= 975z \\ 278{,}2276923 &= z \end{aligned}$$

$\rightarrow P(549 \mid 560 \mid 278{,}23)$

$\tan\alpha = \dfrac{549}{278{,}2276923-178} = \dfrac{975}{178} = 5{,}47752809$

$\rightarrow \alpha = 79{,}65378848°$

$\rightarrow \text{Tiefenwinkel}\,\beta = 90° - 79{,}65378848°$

$\beta = 10{,}34621152° \approx 10{,}35°$

$Q(0 \mid 560 \mid 178)\ ;\ R(975 \mid 560 \mid 0)$

Kontrolle

Ballbewegung nach dem Abschlag:

$$PQ: \vec{x} = \begin{pmatrix} 549 \\ 560 \\ 278{,}23 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -549 \\ 0 \\ -100{,}23 \end{pmatrix}$$

Reflexion an der Stirnwand (y-z-Ebene)

Richtungsvektor **vor** der Reflexion $\begin{pmatrix} -549 \\ 0 \\ -100{,}23 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor **nach** der Reflexion $\begin{pmatrix} 549 \\ 0 \\ -100{,}23 \end{pmatrix}$

Ballbewegung **nach** der Reflexion:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 560 \\ 178 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 549 \\ 0 \\ -100{,}23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$x = 549s$

$y = 560$

$0 = 178 - 100{,}23s \quad \rightarrow 100{,}23s = 178$

$s \approx 1{,}7759$

$\rightarrow x = 549 \cdot 1{,}7759 = 974{,}9691 \approx 975$

$\rightarrow R\left(975 \middle| 560 \middle| 0\right)$

2. M (631,5 | 560 | 220)

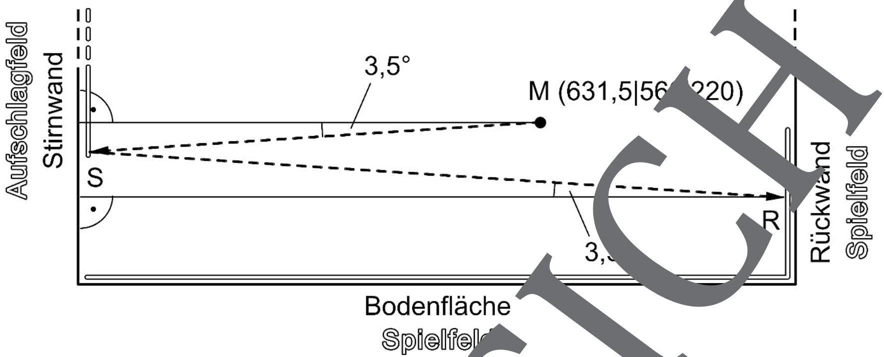

Abb. 7

$\tan 3,5° = \frac{x_1}{631,5}$

$\rightarrow x_1 = 631,5 \cdot \tan 3,5°$

$x_1 \approx 38,6$

$\rightarrow 220 - 38,6 = 181,4$

$\rightarrow S(0 \mid 560 \mid 181,4)$

$\tan 3,5° = \frac{x_2}{975}$

$\rightarrow x_2 = 975 \cdot \tan 3,5°$

$x_2 \approx 59,6$

$\rightarrow 181,4 - 59,6 = 121,8$

$\rightarrow R(975 \mid 560 \mid 121,8)$

Der Ball berührt das Aufschlagfeld der Stirnwand und danach das Spielfeld der Rückwand.