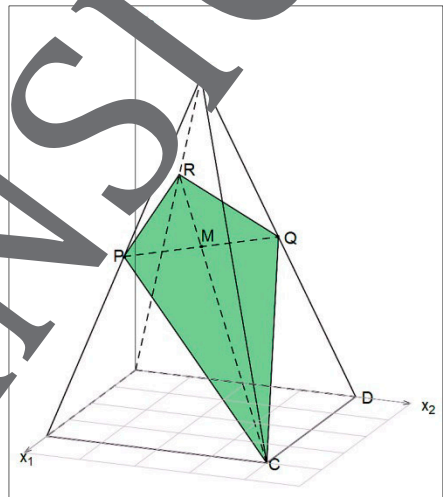


# UNTERRICHTS MATERIALIEN

## Analytische Geometrie Sek. II



Eine Pyramide, Ebenen und Schnittflächen

Schrägbilder zeichnen

## Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sekundarstufe I

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für die elektronische oder sonstige Vervielfältigung, Übersetzung, Verbreitung und öffentliche Zugänglichmachung.

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und angefragt. Sollten dennoch an einzelnen Materialien weitere Rechte bestehen, bitten wir um Benachrichtigung.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH  
Ein Unternehmen der Klett Gruppe  
Rotebühlstraße 77  
70178 Stuttgart  
Telefon +49 711 62900-0  
Fax +49 711 62900-20  
meinRAABE@raabe.de  
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth  
Satz: Rösler MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe  
Illustrationen: Mona Hitzenauer  
Bildnachweis Titel: Mona Hitzenauer  
Lektorat: Mona Hitzenauer

## Eine Pyramide, Ebenen und Schnittflächen

Eine quadratische Pyramide hat die Grundfläche ABCD und die Spitze S

$A(0 | 0 | 0)$ ;  $B(4 | 0 | 0)$ ;  $C(4 | 4 | 0)$ ;  $D(0 | 4 | 0)$ ;  $S(2 | 2 | 6)$

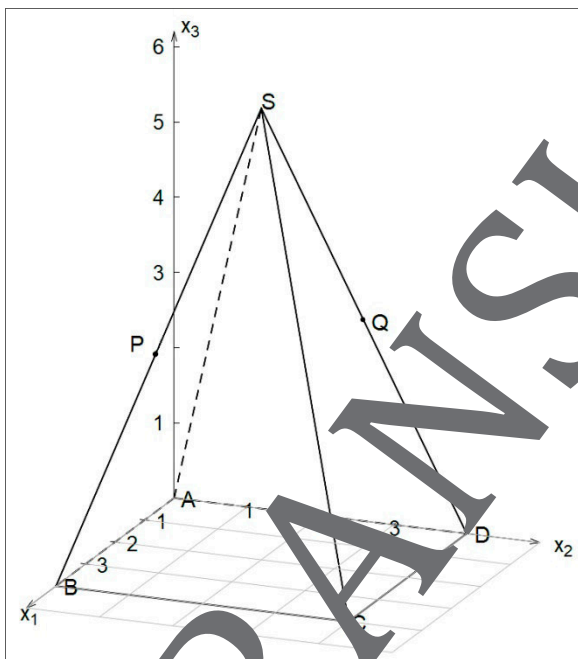


Abb. 1

1. a) P ist die Mitte von [BS]; Q ist die Mitte von [DS].  
Geben Sie die Koordinaten von P und Q an.  
Die Punkte P, C und Q legen eine Ebene E fest.  
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung für E.  
(Kontrollerggebnis: E:  $3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 24$ )
- b) Die Ebene E schneidet [AS] im Punkt R.  
Bestimmen Sie die Koordinaten von R.
- c) Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide mit dem Viereck P\*QR.  
Um welche Art von Viereck handelt es sich bei P\*QR?  
Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch.
- d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Vierecks.
- e) Wie groß ist der Winkel  $\alpha = \sphericalangle PRC$  zwischen [RP] und [RQ]?
2. a) Zeigen Sie: Der Punkt  $T(1 \mid 1 \mid 1)$  liegt auf der Kante [AS].
- b) Eine Ebene E\* geht durch die Punkte C und T. Außerdem ist E\* parallel zur Diagonalen [BD].  
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung für E\*.  
(Kontrollerggebnis: E\*:  $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ )
- c) Die Ebene E\* schneidet die Pyramide im Viereck B\*CD\*T.  
Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide mit dem Viereck B\*CD\*T.
- d) Wie groß ist der Winkel  $\alpha = \sphericalangle B^*TD^*$  zwischen [TB\*] und [TD\*]?
3. U sei ein beliebiger Punkt der Strecke [BS].  
Die Ebene F wird durch die Punkte C, T und U festgelegt.  
Welche Schnittflächen CVTU sind möglich?  
*Hinweis:* Suchen Sie zunächst nach besonderen Positionen von U.  
Geben Sie für die möglichen Flächentypen jeweils ein Beispiel (inkl. Zeichnung) an.

### Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend, weiterführend
- Fachlicher Bezug: Geometrie
- Kommunikation: Vermutungen äußern, begründen
- Problemlösen: reproduzieren, Lösungen berechnen, Ergebnisse reflektieren, Darstellungen verwenden
- Modellierung: –
- Medien: Farbfolie
- Methode: Einzelarbeit, Gruppenarbeit
- Inhalt in Stichworten: Pyramide, Schrägbild, Schnittfläche, Flächeninhalt, Drehen, Trapez, Kreuzprodukt

**Autor:** Peter Bunzel

### Lösung

1. a)  $B(4 | 0 | 0)$ ;  $S(2 | 2 | 6)$

P ist die Mitte von  $[BS]$ :  $P\left(\frac{4+2}{2} \mid \frac{0+2}{2} \mid \frac{0+6}{2}\right) = P(3 | 1 | 3)$

$D(0 | 4 | 0)$ ;  $S(2 | 2 | 6)$

Q ist die Mitte von  $[DS]$ :  $Q\left(\frac{0+2}{2} \mid \frac{4+2}{2} \mid \frac{0+6}{2}\right) = Q(1 | 3 | 3)$

$P(3 | 1 | 3)$ ;  $Q(1 | 3 | 3)$

**Parametergleichung für E**

E:  $\vec{x} = OC + s \cdot \vec{CP} + t \cdot \vec{CQ}$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + t \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Bestimmung der Koordinatengleichung***1. Lösungsweg (über Parameter-Elimination)*

(I)  $x_1 = 4 - s - 3t$

(II)  $x_2 = 4 - 3s - t$

(III)  $x_3 = 3s + 3t$

(I) + (III)  $x_1 + x_3 = 4 + 2s \quad | \cdot 3$

$3 \cdot [(I) + (III)] \quad 3x_1 + 3x_3 = 12 + 6s$

$+3 \cdot (II) + (III) \quad 3x_2 + x_3 = 12 - 6s$

E:  $3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 24$

*2. Lösungsweg (mit Normalenvektor)*

$$\overline{CP} \times \overline{CQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9+3 \\ -9+3 \\ 1-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

E:  $[\vec{x} - \overline{OC}] \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 24 = 0$$

b) Gerade  $g$  durch  $A$  und  $S$ :

$$s: \vec{x} = \overline{AS} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

*Bemerkung:* Die Gleichung von  $g$  könnte zwar in  $\vec{x} = u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  abgeändert werden. Für das Erstellen des Schrägbildes ist es aber günstiger, mit  $\vec{x} = v \cdot \overline{AS}$  weiter zu rechnen.

Denn dann kann  $R$  unmittelbar eingezeichnet werden (siehe Abb. 2).

$$g \cap E = \{R\}: 3 \cdot 2r + 3 \cdot 2r + 4 \cdot 6r - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow 36r = 24 \Leftrightarrow r = \frac{2}{3} \Rightarrow R \left( \frac{4}{3} \mid \frac{4}{3} \mid 4 \right)$$

*Bemerkung:* Für den Punkt  $R$  gilt:  $\overline{OR} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AS}$ .

Man kann also unmittelbar die Länge der Strecke  $[AS]$  im Schrägfeld ausmessen und von  $A$  aus zwei Drittel dieser Streckenlänge abtragen.

c)

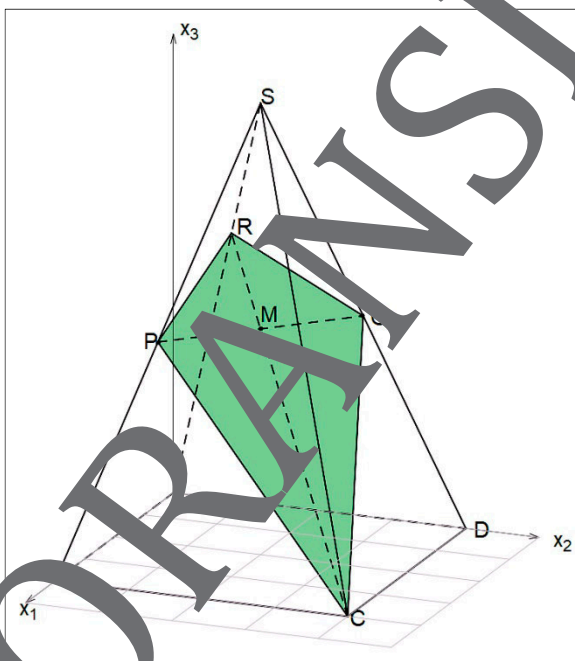


Abb.

## Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



### Wir bieten Ihnen:



Schnelle und intuitive Produktsuche



Übersichtliches Kundenkonto



Komfortable Nutzung über  
Computer, Tablet und Smartphone



Höhere Sicherheit durch  
SSL-Verschlüsselung

**Mehr unter: [www.raabe.de](http://www.raabe.de)**