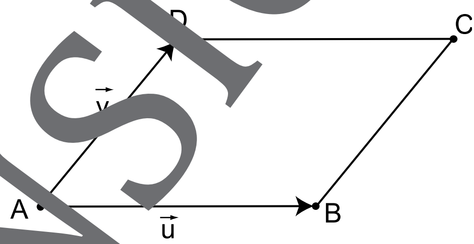
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II



Vom Parallelogramm zum Quadrat

Räumliches Vorstellungsvermögen trainieren

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Se[illegible] Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Carlo Vöst, Mona Hitzenauer
Bildnachweis Titel: Carlo Vöst
Lektorat: Mona Hitzenauer

Vom Parallelogramm zum Quadrat

Zwei beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmen im $\mathbb{R}^3$ immer ein Parallelogramm (Viereck, bei dem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind). Um im Raum eine eindeutige Lage zu bekommen, muss aber ein Eckpunkt fest vorgegeben sein.

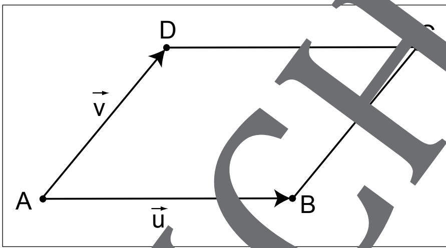


Abb. 1

Flächenberechnung eines Parallelogramms

Satz: Es gilt: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

Beweis

1. Fall: $\vec{a}=\vec{0}$ oder $\vec{b}=\vec{0}$, dann ist $\vec{0}\times\vec{b}=\vec{0}$ oder $\vec{a}\times\vec{0}=\vec{0}$, also ergibt sich auf der linken wie auf der rechten Seite der Wert 0.

2. Fall: $\vec{a}\neq\vec{0}$ und $\vec{b}\neq\vec{0}$:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2 = \begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix}^2 = \left(a_2b_3-a_3b_2\right)^2+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)^2+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2$$

$$= a_2{}^2b_3{}^2-2a_2b_3a_3b_2+a_3{}^2b_2{}^2+a_3{}^2b_1{}^2-2a_3b_1a_1b_3+a_1{}^2b_3{}^2+a_1{}^2b_2{}^2$$
$$-2a_1b_2a_2b_1+a_2{}^2b_1{}^2 \quad (*)$$

$$\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\left(\sin\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)^2 = \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\cdot\left(1-\cos^2\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right) = \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\frac{\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)^2}{\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2}$$

$$= \left(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2\right)\left(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2\right)-\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2$$

$$= \left(a_1{}^2b_1{}^2+a_1{}^2b_2{}^2+a_1{}^2b_3{}^2+a_2{}^2b_1{}^2+a_2{}^2b_2{}^2+a_2{}^2b_3{}^2+a_3{}^2b_1{}^2+a_3{}^2b_2{}^2+a_3{}^2b_3{}^2\right)$$
$$-\left(a_1{}^2b_1{}^2+a_2{}^2b_2{}^2+a_3{}^2b_3{}^2+2a_1b_1a_2b_2+2a_1b_1a_3b_3+2a_2b_2a_3b_3\right) = (*)$$

Aufgaben

1. Gegeben ist der Punkt $A(3 \mid -3 \mid 4)$ und die Vektoren:

   $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Durch diese Angaben wird eindeutig ein Parallelogramm ABCD bestimmt, indem man den Anfangspunkt der Vektoren in A wählt. Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte B, C und D.

2. Gegeben sind die Punkte $A(3 \mid -1 \mid 0)$, $B(1 \mid 2 \mid 2)$ und $C(1 \mid 0 \mid -2)$. Ergänzen Sie das Dreieck ABC durch einen vierten Punkt D so, dass ein Parallelogramm entsteht.

   Hinweis: Es gibt für die Lage des Punktes D verschiedene Möglichkeiten.

3. Gegeben sind die Punkte $A(-8 \mid -4 \mid 1)$, $B(7 \mid 8 \mid 17)$ und $C(7 \mid -16 \mid -15)$. Bestimmen Sie einen Punkt D so, dass das Viereck ACDB eine Raute ist und berechnen Sie den Abstand h paralleler Rautenseiten.

4. Gegeben sind die Punkte $A(2 \mid 1 \mid -3)$, $B(4 \mid -1 \mid -2)$ und $C(3 \mid 3 \mid -1)$.

   Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig-rechtwinklig ist und bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass das Viereck BDCA ein Quadrat ist.

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend
- Fachlicher Bezug: Analytische Geometrie
- Kommunikation: Lösungsansätze diskutieren, Ergebnisse reflektieren
- Problemlösen: Beweis führen, vernetztes Denken
- Modellierung: räumliche Vorstellung, Modell entwickeln
- Medien: CAS-Rechner
- Methode: Einzelarbeit, Lehrervortrag
- Inhalt in Stichworten: Parallelogramm, Raute, Quadrat aus Sicht der Analytischen Geometrie

Autor: Carlo Vöst

Lösung

1. $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

   $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

   $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

   Also sind die Eckpunkte des Parallelogramms:

   $A(3 \mid -3 \mid 4)$

   $B(2 \mid -1 \mid 7)$

   $C(4 \mid -1 \mid 6)$

   $D(5 \mid -3 \mid 3)$

2. Prinzipiell gibt es hier 3 verschiedene (gleichwertige) Lösungsmöglichkeiten für mögliche Parallelogramme, wie die Abbildung zeigt.

$$\overrightarrow{d_1} = \vec{a} + \left(\vec{b} - \vec{c}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{d_2} = \vec{b} + \left(\vec{c} - \vec{a}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

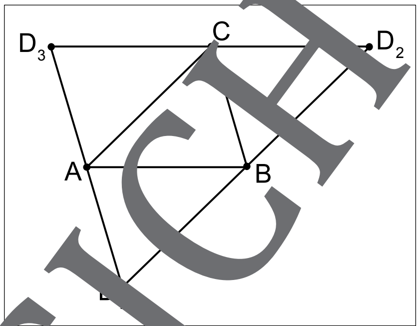


Abb. 4

$$\overrightarrow{d_3} = \vec{a} + \left(\vec{c} - \vec{b}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

3. $$\overline{AB} = \sqrt{(7+8)^2 + (8+4)^2 + (17-1)^2} = 25$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(7+8)^2 + (-16+4)^2 + (-15-1)^2} = 25$$

$$\Rightarrow \ \vec{d} = \vec{b} + \left(\vec{c} - \vec{a}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 7 \\ -16 \\ -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 22 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$D(22 \mid -4 \mid 1)$

$$F_{\text{Raute ACDB}} = \overline{AB} \cdot h \iff h = \frac{F_{\text{Raute ACDB}}}{\overline{AB}}$$

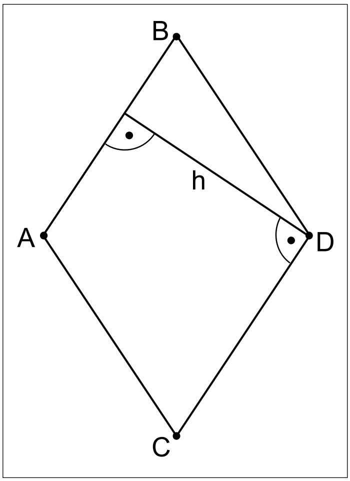


Abb. 5