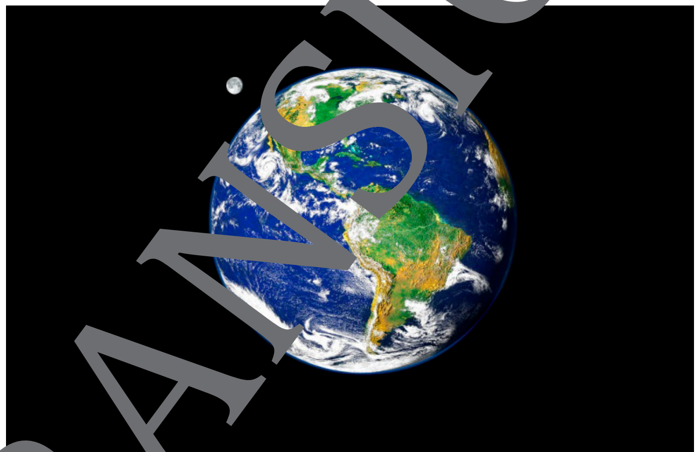
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II



Die Kugel als Modell der Erde

Geografische Breiten und Entfernungen auf der Erdkugel berechnen

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: [illegible] Ortl[illegible]
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Mona Hitzenauer
Bildnachweis Titel: Mona Hitzenauer
Lektorat: Mona Hitzenauer

Die Kugel als Modell der Erde

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Punkte $A(6 \mid 2 \mid 4)$ und $B(8 \mid 6 \mid 4)$ sowie die Punktemenge $C_a\,(a - 1 \mid 9 + a \mid 3 + a)$, $a \in \mathbb{R}$ gegeben.

1. a) Was stellt die Punktemenge C_a dar, wenn a alle zugelassenen Werte annimmt? Bestimmen Sie den Wert für a so, dass das Dreieck ABC_1 bei B einen rechten Winkel besitzt.
   Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC_1?

   b) Bestimmen Sie den Mittelpunkt U sowie den Radius r_u des Umkreises des Dreiecks ABC_1.

   c) Die Punkte A, B und C_1 spannen eine Ebene E auf. Geben Sie eine Gleichung von E in Normalenform an.
   Zeigen Sie dann, dass der Punkt $P(5{,}5 \mid 6 \mid 4)$ im Inneren des Dreiecks ABC_1 liegt.

2. a) Der Punkt A liegt auf einer Kugel K um den Punkt $M(3 \mid 6 \mid 0)$. Bestimmen Sie eine Gleichung von K und zeigen Sie, dass der Punkt B auch auf dieser Kugel K liegt.
   Berechnen Sie dann alle Werte a so, dass die Punkte C_a auf K liegen.

   b) Zeigen Sie, dass der Punkt $S(-1 \mid 2 \mid -3)$ auch auf der Kugel K, aber nicht in der Ebene E liegt.
   Berechnen Sie dann das Volumen der Pyramide ABC_1S auf zwei verschiedene Arten (*Hinweis*: Nutzen Sie das Spatprodukt).

   c) Die Ebene T berührt die Kugel K im Punkt A. Geben Sie eine Gleichung von T in Normalenform an.
   Bestimmen Sie dann eine Gleichung der Schnittgeraden s und die Maßzahl des (spitzen) Schnittwinkels ε der Ebenen E und T.

Die Kugel K aus Aufgabe 2. sei ein Modell der Erde, wobei die Erdabflachung an den Polen unberücksichtigt bleibt.

3. a) Begründen Sie, dass die drei Punkte A, B und C_1 auf dem gleichen (nördlichen) Breitenkreis liegen können. Welchen Radius hat dieser im Modell und welchen in Wirklichkeit?
Hinweis: Verwenden Sie $r_{Erde} = 6370$ km

Welche gemeinsame geografische Breite φ besitzen die drei Punkte A, B und C_1?

b) Ein Abenteurer bewegt sich entlang des gemeinsamen Breitenkreises von A nach C_1. Wie groß ist diese Entfernung?
Gibt es einen kürzeren Weg von A nach C_1?
Berechnen Sie gegebenenfalls dessen Länge.

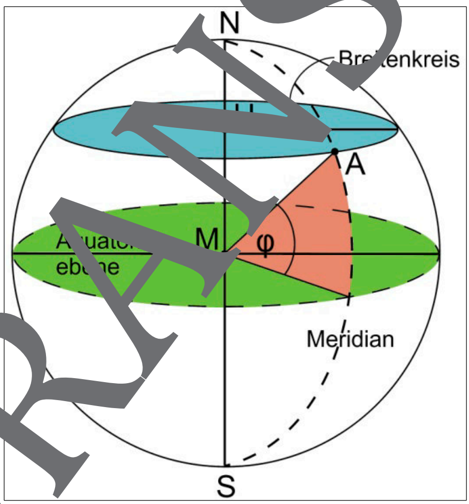


Abb. 1

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend
- Fachlicher Bezug: Analytische Geometrie, Geografie
- Kommunikation: argumentieren und begründen
- Problemlösen: Lösung finden
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Einzel- oder Gruppenarbeit, Hausaufgabe
- Inhalt in Stichworten: Dreiecksberechnungen, Umkreis, Ebenen mit Schnittgerade und Schnittwinkel, Pyramidenvolumen, Kugel als Modell der Erde, geografische Breiten und Entfernungen auf der Erdkugel

Autor: Alfred Müller

Lösung

A(6 | 2 | 4), B(8 | 6 | 4), C_a (a – 1 | 9 + a | 3 + a)

1. a) Die Punkte C_a liegen auf einer Geraden g. „Spaltet" man die Koordinaten von C_a auf, so erhält man:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a-1 \\ 9+a \\ 3+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ Gerade g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rechter Winkel bei B:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{C_aB} = \begin{pmatrix} 9-a \\ -3-a \\ 1-a \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{C_aB} = 18 - 2a - 12 - 4a = 0$$

$$\Rightarrow 6a = 6$$

$$\Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow C_1(0 \,|\, 10 \,|\, 4)$$

Flächeninhalt des Dreiecks ABC_1:

- Elementargeometrische Berechnung:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5},\ \left|\overrightarrow{C_1B}\right| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{C_1B}\right| = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{5} = 20\ \text{FE}$$

- Vektorielle Berechnung:

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC_1}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot 40 = 20\ \text{FE}$$

b) Da das Dreieck ABC_1 rechtwinklig ist mit dem rechten Winkel bei B, ist der Umkreis des Dreiecks ABC_1 der Thaleskreis über der Hypotenuse $[AC_1]$.
Der Mittelpunkt U ist der Mittelpunkt der Strecke $[AC_1]$.

$$\vec{u} = \frac{1}{2}\cdot\left(\vec{a} + \vec{c_1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow U(3 \mid 6 \mid 4)$$

Der Radius r des Umkreises ist die Länge der Strecke [AU].

$$r = \left|\overrightarrow{AU}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 5\ \text{LE}$$

c) Ebene

$$E:\ \vec{x} = \vec{a} + \lambda\cdot\overrightarrow{AB} + \mu\cdot\overrightarrow{AC_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einen Normalenvektor der Ebene bestimmt man mithilfe des Kreuzprodukts der beiden Richtungsvektoren von E.