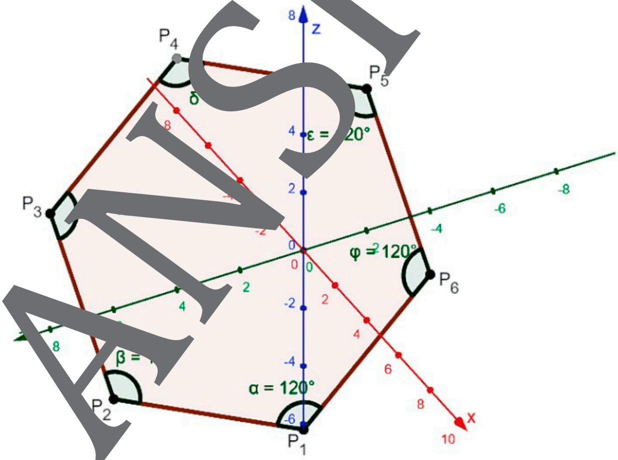
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II



Teilungsverhältnis im Sechseck

Berechnungen an regulären Vielecken

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: [illegible] Orth[illegible]
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Günther Weber
Bildnachweis Titel: Günther Weber
Korrektorat: Christin Wollert

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend/weiterführend
- Fachlicher Bezug: Geometrie
- Kommunikation: Vermutungen äußern; Ergebnisse vorstellen
- Problemlösen: Beweis führen, vernetztes Denken
- Modellierung: Modell entwickeln
- Medien: Geogebra 3D
- Methode: Einzel-/Partnerarbeit
- Inhalt in Stichworten: Länge einer Strecke, Winkel zwischen Vektoren, Schnitt von Geraden, Vektorkette, linear unabhängig, Strahlensatz

Autor: Günther Weber

Methodisch-didaktische Hinweise

Evtl. muss vor der Bearbeitung von Aufgabe 1 der Begriff „reguläres Sechseck" geklärt werden. Bei leistungsschwächeren Lerngruppen kann vor der Bearbeitung auch eine Lösung mithilfe eines 3D-Geometrieprogramms geschehen (siehe Lösung mit Geogebra 3D am Ende der Lösung).

Bei **regulären (regelmäßigen)** Vielecken besitzen alle Seiten die gleiche Länge und alle Innenwinkel sind gleich groß.

Lösung

1. Ein Sechseck ist regelmäßig, wenn alle Seiten gleich lang und zudem alle Innenwinkel gleich groß (und zwar 120°) sind. Um nachzuweisen, dass das Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ die erstgenannte Eigenschaft besitzt, werden die Längen der sechs Seiten von $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ (in Abhängigkeit von b) jeweils als Betrag des entsprechenden Seitenvektors berechnet.

   Es gilt:

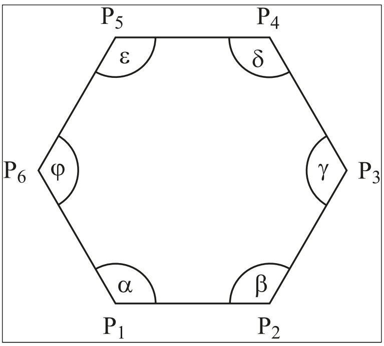
$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} b \\ 2b \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-b)^2 + b^2} = \sqrt{2b^2} \overset{b>0}{=} b\sqrt{2}$$

   Mit CAS:

$p1:=\begin{bmatrix} [illegible] \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$ $p2:=\begin{bmatrix} b \\ 2\cdot b \\ [illegible] \end{bmatrix}$ $p3:=\begin{bmatrix} 0 \\ 2\cdot b \\ b \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2\cdot b \\ b \end{bmatrix}$
$p4:=\begin{bmatrix} 0 \\ [illegible] \\ [illegible] \end{bmatrix}$ $p5:=\begin{bmatrix} b \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$ $p6:=\begin{bmatrix} 2\cdot b \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2\cdot b \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$
norm(p2−p1)	$\lvert b\rvert\cdot\sqrt{2}$
norm(p3−p2)	$\lvert b\rvert\cdot\sqrt{2}$
norm(p4−p3)	$\lvert b\rvert\cdot\sqrt{2}$
norm(p5−p4)	$\lvert b\rvert\cdot\sqrt{2}$
norm(p6−p5)	$\lvert b\rvert\cdot\sqrt{2}$
norm(p1−p6)	$\lvert b\rvert\cdot\sqrt{2}$

   Eine entsprechende Rechnung für die anderen Seitenlängen (siehe Screenshot) ergibt:
   Alle Seiten haben also die gleiche Länge von $b\sqrt{2}$ LE.

   Um die zweite Eigenschaft, dass die Innenwinkel alle gleich groß sind, für $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ nachzuweisen, bietet es sich hier an, die Innenwinkel von $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ jeweils als die von den entsprechenden Seitenvektoren eingeschlossenen Winkel zu berechnen, da die Seitenvektoren bereits ermittelt wurden. Dabei werden die Innenwinkel gemäß nebenstehender Abbildung bezeichnet.



So ergibt sich:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{P_1P_2} \circ \overrightarrow{P_1P_6}}{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{P_1P_6}\right|} = -\frac{\overrightarrow{P_1P_2} \circ \overrightarrow{P_6P_1}}{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{P_6P_1}\right|}$$

$$= -\frac{\begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -b \end{pmatrix}}{b\sqrt{2} \cdot b\sqrt{2}} = -\frac{b^2}{2b^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 120°$$

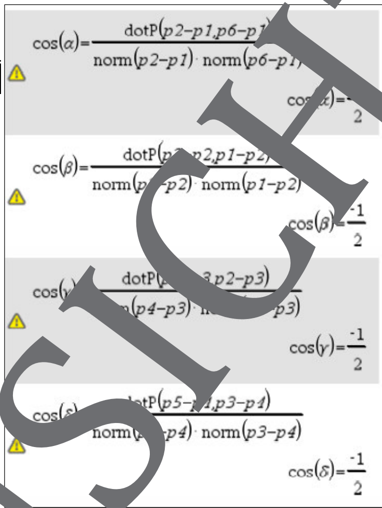
Eine entsprechende Rechnung für die anderen Winkel (siehe Screenshot) ergibt:

Alle sechs Innenwinkel des Sechsecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ betragen unabhängig vom Wert für $b > 0$ jeweils 120°.

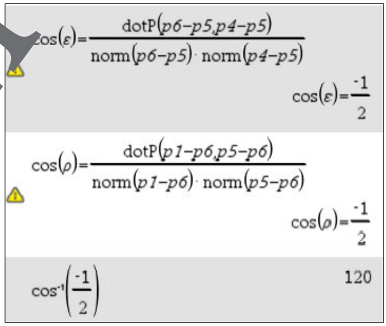
Hinweis:

Beachten Sie bei der Berechnung der Winkel, dass die Vektoren von dem Scheitelpunkt des Winkels ausgehen.

Mit CAS:



Mit CAS:



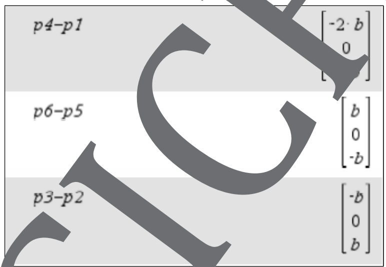
2. In einem Trapez sind 2 Gegenseiten parallel. Die parallelen Seiten werden Grundseiten des Trapezes genannt.
   Die Zweipunkteform der Gerade durch die Punkte P_1 und P_4 lautet:

$$g_{P_1P_4}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + r' \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 2b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 2b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + r' \cdot \begin{pmatrix} -2b \\ 0 \\ 2b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit CAS:



Die Richtungsvektoren der der Gerade gegenüberliegenden Seiten sind:

$$\overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2b \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ 2b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\overrightarrow{P_6P_5} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 2b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2b \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren der Seitenvektoren sind gleich (linear abhängig von) dem Richtungsvektor der Geraden $g_{P_1P_4}$, die Seiten $\overline{P_1P_4}$ und $\overline{P_2P_3}$ bzw.

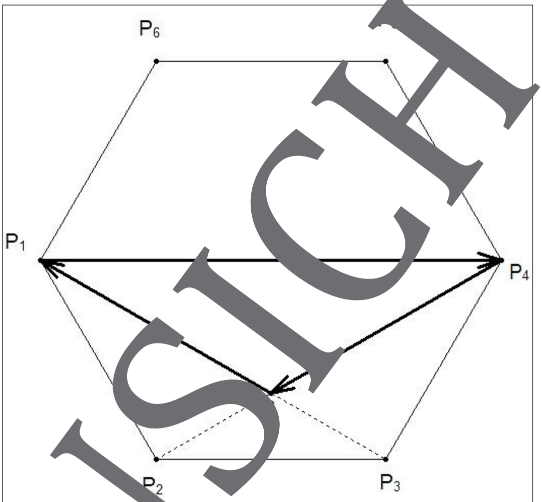
$\overline{P_1P_4}$ und $\overline{P_6P_5}$ sind parallel. Die Vierecke $P_1P_2P_3P_4$ und $P_1P_4P_5P_6$ sind Trapeze. Die Trapeze sind gleichschenklig, denn die beiden nicht parallelen Seiten sind nach Aufgabe 1 gleich lang und beide Trapeze sind kongruent, denn die Basiswinkel haben eine Größe von 120° bzw. 60°.

Lösung mithilfe einer Vektorkette

Die Vektoren $\overrightarrow{P_1P_4}$, $\overrightarrow{P_4S}$ und $\overrightarrow{SP_1}$ bilden eine geschlossene Vektorkette. Somit gilt:

$$\overrightarrow{P_1P_4} + \overrightarrow{P_4S} + \overrightarrow{SP_1} = \vec{o}$$

$$\overrightarrow{P_1P_4} + r \cdot \overrightarrow{P_4P_2} + s \cdot \overrightarrow{P_3P_1} = \vec{o}$$



Nach Aufgabe 2 sind die Vektoren $\overrightarrow{P_1P_4}$ und $\overrightarrow{P_2P_3}$ parallel und der Betrag des Vektors $\left|\overrightarrow{P_1P_4}\right|$ ist doppelt so groß wie der Betrag des Vektors $\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|$.

Umschreiben der Vektorkette ergibt:

$$\overrightarrow{P_1P_4} + r \cdot \left(\overrightarrow{P_4P_1} + \overrightarrow{P_1P_2}\right) + s \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{P_4P_1} + \overrightarrow{P_2P_1}\right) = \vec{o}$$

Die Vektoren $\overrightarrow{P_1P_4}$ und $\overrightarrow{P_1P_2}$ sind linear unabhängig. Nach Einsetzen von $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_4}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{P_1P_2}$ erhält man die Vektorkette:

$$\vec{a} + r \cdot \left(-\vec{a} + \vec{b}\right) + s \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (-\vec{a}) + (-\vec{b})\right) = \vec{o}$$

$$\vec{a} - r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b} - s \cdot \frac{1}{2} \cdot \vec{a} - s\vec{b} = \vec{o}$$

$$\vec{a} \cdot \left(1 - r - \frac{1}{2}s\right) + \vec{b} \cdot (r - s) = \vec{o}$$