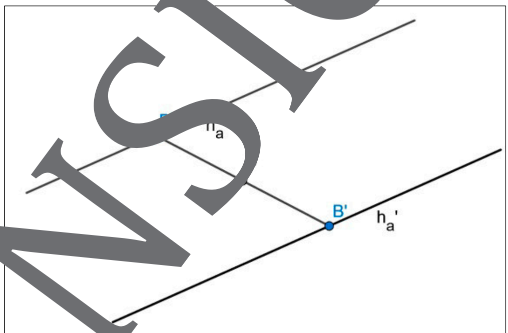
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II



Gerade und Geradenschar, Ebenen und Projektionen

Ebenengleichungen anwenden

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Schirin Orth
Bildnachweis Titel: Schirin Orth
Korrektorat: Daniel Fässler

Gerade und Geradenschar, Ebenen und Projektionen

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind der Punkt P(7 | 2 | 9),

die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ sowie

die Menge der Geraden h_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu, a \in \mathbb{R}$ gegeben.

1. a) Zeigen Sie, dass alle Geraden h_a in der Ebene H: $x_1 + 1 = 0$ liegen. Berechnen Sie dann die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g mit der Ebene H.

   b) Geben Sie eine weitere Ebene $H' \neq H$ an, die auch alle Geraden h_a enthält. Welche Lage haben H und H′ zueinander?

   c) Untersuchen Sie die Lage der Geraden g zu allen Geraden h_a. Was kann man aus den bisherigen Ergebnissen über die Menge h_a folgern?

   d) Die Geraden h_a werden am Punkt P gespiegelt. Welche Gleichung haben die entstehenden Geraden h_a'?

2. a) Zeigen Sie, dass die Geraden g und k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, eindeutig eine Ebene E aufspannen. Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

   b) Die Ebenen E und H schneiden sich in einer Geraden s unter einem Winkel φ. Geben Sie s sowie die Größe des Winkels φ an.

   c) Warum schneiden alle Geraden h_a die Ebene E in einem Punkt Q? Geben Sie dessen Koordinaten an.

3. a) Der Punkt T(– 1 | 3 | – 2) werde parallel zum Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix}$ auf die Ebene E projiziert. Welche Koordinaten hat diese Projektion T´?

   b) Zeigen Sie, dass der Punkt T´ auf der Geraden PS liegt. Berechnen Sie das Teilverhältnis τ, in welchem der Punkt P die Strecke [T´S] teilt. Beschreiben Sie dann anhand einer Skizze die gegenseitige Lage der Punkte P, T´, S.

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend/weiterführend
- Fachlicher Bezug: Geometrie
- Kommunikation: Ergebnisse vorstellen
- Problemlösen: −
- Modellierung: −
- Medien: GTR/CAS
- Methode: Einzel-/Partnerarbeit
- Inhalt in Stichworten: Ebenengleichungen (Koordinatenform, Parameterform, Achsenabschnittsform), Schnitt Ebene – Koordinatenachsen

Autor: Alfred Müller

Lösung

Gegeben sind: P (7 | 2 | 9), g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \end{pmatrix}$

1. a) H: $x_1 + 1 = 0$:
   h_a in H: $-1 + 1 = 0$ w. ⇒ Die Geraden h_a liegen in der Ebene H.
   g in H: $4 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -5 \Rightarrow$ Schnittpunkt S (–1| –5 | 15)

   b) Zum Aufstellen einer weiteren Ebene H′ wird die Gerade h_1 mit

   h_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sowie ein Punkt A benutzt, der nicht auf h_a

   liegt, z. B. A (0 | 0 | 1):

   $$H′: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ein Normalenvektor zur Ebene H′ kann mithilfe des Kreuzprodukts der beiden Richtungsvektoren bestimmt werden.

Es gilt:

$$\vec{n}_{H'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H': \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \Rightarrow H': x_2 + x_3 - 1 = 0$$

Probe: h_a in H′: $3 + a\mu - 2 - a\mu - 1 = 0$

$0 = 0$ w. $h_a \subset H'$

Die Ebene H und H′ schneiden sich senkrecht in der Geraden h_1.

c) $g \cap h_a$:

$$\begin{array}{lrcl} 1. & 4 + \lambda & = & -1 \\ 2. & 5 + 2\lambda & = & 3 + a\mu \\ 3. & -3\lambda & = & -2 - a\mu \end{array}$$

aus 1: $\lambda = -5$

2 + 3: $5 - \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 4$ Widerspruch!

⇒ Alle Geraden h_a und die Gerade g sind windschief zueinander. Aus den Ergebnissen folgt: h_a ist keine echte Geradenschar, sondern kann durch die Gerade h_1 dargestellt werden. Es gilt:

$$h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1$$