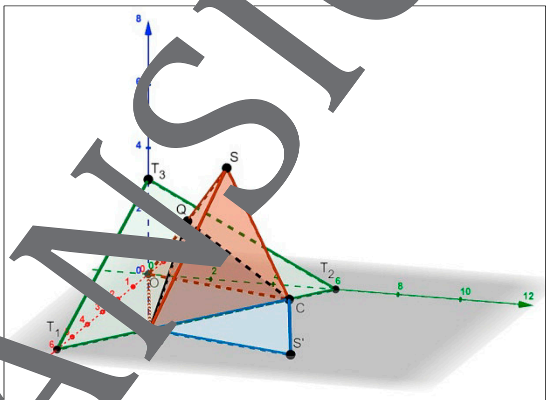
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II



Schrägbilder, Ebenen und Pyramide

Die gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen trainieren

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Schirin Orth
Bildnachweis Titel: Schirin Orth

Schrägbilder, Ebenen und Pyramide

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(1 | 1 | 2), B([illegible] | –1 | 1) und C(1 | 5 | 0) sowie die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\rho \in \mathbb{R}$ gegeben.

1. a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C eine Ebene E bilden und berechnen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform (Normalenform). Bestimmen Sie dann die Schnittpunkte T_i mit den x_i-Koordinatenachsen (i = 1, 2, 3) und zeichnen Sie ein Schrägbild von E in einem Koordinatensystem. Welchen Flächeninhalt A_1 und welche Innenwinkel α, β und γ hat das Dreieck ABC?

   b) Welche Lage besitzen die Gerade g und die Ebene E zueinander? Bestimmen Sie dann eine Gleichung der Spurgeraden s der Ebene E mit der x_1x_2-Koordinatenebene. Begründen Sie jetzt ohne Rechnung, dass der Punkt C auf s liegt.
   Zeigen Sie ferner, dass der Schnittpunkt D der Geraden g mit der x_1x_2-Ebene ebenfalls auf s liegt.

2. Der Koordinatenursprung O und die Punkte C und D bilden die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S(1 | 3 | 4).

   a) Tragen Sie diese Pyramide in das obige Schrägbild ein und berechnen Sie den Schnittpunkt Q der Ebene E mit der Kante [OS] der Pyramide OCDS. Welche besondere Lage besitzt der Punkt Q bezüglich der Kante [OS]? Stellen Sie dann das Flächenstück A_2, das die Ebene E aus der Pyramide ausschneidet, im Schrägbild dar und berechnen Sie die Maßzahl von A_2.

   b) Bestimmen Sie den Inhalt G der Grundfläche OCD der Pyramide sowie den Abstand h der Spitze S von der Grundfläche. Berechnen Sie dann das Volumen der Pyramide auf zwei verschiedene Arten.

c) Der Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gibt die Richtung von parallel einfallendem Licht an. Dabei wirft die Pyramide OCDS einen Schatten auf die x_1x_2-Koordinatenebene. Berechnen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes S′ der Pyramidenspitze S. Zeichnen Sie den Pyramidenschatten in das Koordinatensystem ein und zeigen Sie, dass die Grundfläche OCD der Pyramide zusammen mit dem Schattenbild ein Parallelogramm bildet.

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend
- Fachlicher Bezug: Analytische Geometrie
- Kommunikation: argumentieren und begründen
- Problemlösen: Lösungen berechnen, Zeichnungen erstellen
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Einzelarbeit, Hausaufgabe
- Inhalt in Stichworten: Geraden und Ebenen und ihre gegenseitige Lage, Pyramide und Schrägbilder

Autor: Alfred Müller

Lösung

A(1 | 1 | 2), B(5 | –1 | 1), C(1 | 5 [illegible] $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} [illegible] \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

1. a) Ebene E:

Da die Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = k \cdot \overrightarrow{AC}$ nicht parallel sind, bilden die drei Punkte A, B, C eine Ebene E.

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Einen Normalenvektor der Ebene E bestimmt man mithilfe des Kreuzprodukts der beiden Richtungsvektoren von E.

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{n} \circ \left[\vec{x}-\vec{a}\right] = 0$$

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = x_1 + x_2 + 2x_3 - (1+1+4)$$

$$= x_1 + x_2 + 2x_3 - 6 = 0$$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

x_1-Achse: $x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 6 \Rightarrow T_1\,(6 \mid 0 \mid 0)$

x_2-Achse: $x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 6 \Rightarrow T_2\,(0 \mid 6 \mid 0)$

x_3-Achse: $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 3 \Rightarrow T_3\,(0 \mid 0 \mid 3)$

Schrägbild:

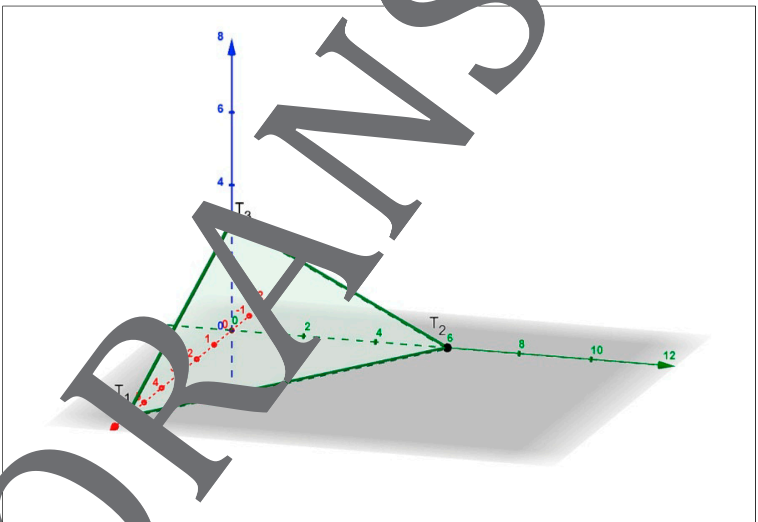


Abb. 1

Flächeninhalt A des Dreiecks ABC:

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}\right| = \frac{8}{2}\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 4\sqrt{6}\ \text{FE}$$