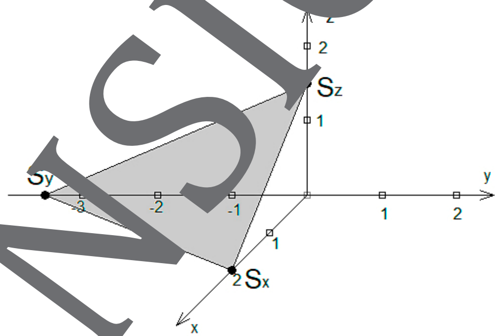
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analytische Geometrie Sek. II



Darstellung der Lage von Ebenen im Raum

Mit GeoGebra Ebenen erkunden

RAABE
KLASSE SCHULE

VORANSICHT

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für die elektronische oder sonstige Vervielfältigung, Übersetzung, Verbreitung und öffentliche Zugänglichmachung.

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und angefragt. Sollten dennoch an einzelnen Materialien weitere Rechte bestehen, bitten wir um Benachrichtigung.

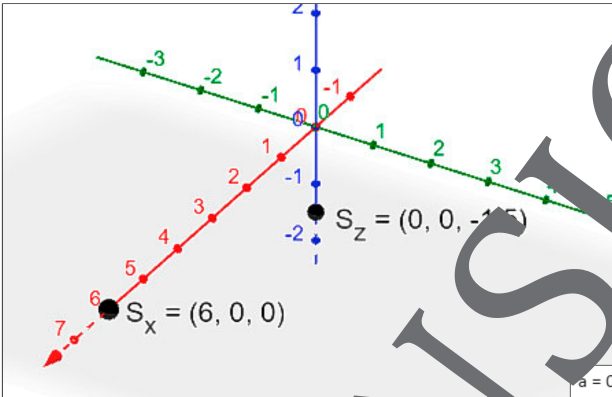
Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: [illegible] Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Günther Weber
Bildnachweis Titel: Günther Weber

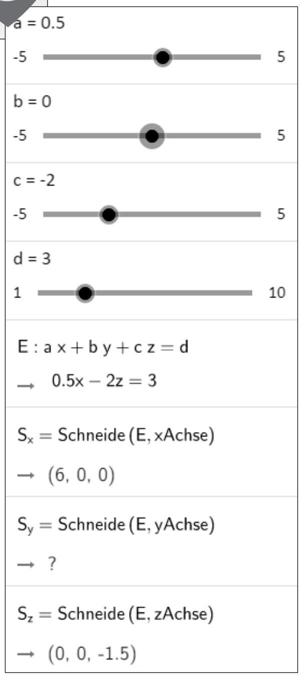
VORANSICHT

Darstellung der Lage von Ebenen im Raum

Mit der Datei „E.2.30_Lage von Ebenen im Raum.ggb“ können die Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen bestimmt werden.



Mit den Schiebereglern a, b, c und d können die Variablen der Ebenengleichung $ax+by+cz=d,\ d\neq 0$ verändert werden. Die Schrittweite bei den Schiebereglern a, b und c ist 0,5, die Schrittweite beim Schieberegler d ist 1. Angezeigt werden die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. Gibt es keinen Schnittpunkt, so wird in der Berechnung ein „?“ ausgegeben. Abhängig von der Anzahl der Schnittpunkte kann die Lage der Ebene bzgl. der Koordinatenachsen beschrieben werden.



* Die GeoGebra-Datei befindet sich im Archiv:
https://archiv.raabe.de/mathe-geometrie/

VORANSICHT

1. Wählen Sie keinen, einen oder zwei Koeffizienten der Ebene E: $ax + by + cz = d,\ d \neq 0$ gleich Null.

   a) Tragen Sie die (Null-)Koeffizienten, die Anzahl der Schnittpunkte sowie die Lage der Ebene bzgl. der Koordinatenachsen in eine Tabelle der nachfolgenden Form ein.

Koeffizienten	Ebenengleichung (beispielhaft)	Anzahl der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen	Lage der Ebene bzgl. der Koordinatenachsen

   b) Beschreiben Sie abhängig von der Anzahl der Koeffizienten, die den Wert 0 annehmen, die Lage der Ebene E bzgl. der Koordinatenachsen.

2. a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen:

   I $E_1: 2x - 3y + 4z$ [illegible]

   II $E_2: 3x - 2y = 4$

   III $E_3:$ $6z$ [illegible] $= 0$

   b) Bestimmen die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen direkt aus der Parameterform der Ebenengleichung:

$$E_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \text{[illegible]} \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \text{[illegible]} \\ -3 \end{pmatrix} \text{[illegible]} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R}$$

VORANSICHT

Liegt die Ebene E in der Koordinatenform $ax + by + cz = d,\ d \neq 0$ vor, so kann die Ebenengleichung durch Äquivalenzumformungen in die **Achsenabschnittsform** umgestellt werden.

$$E:\quad ax + by + cz = d$$

$$E':\quad \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d}z = 1$$

$$E'':\quad \frac{x}{\frac{d}{a}} + \frac{y}{\frac{d}{b}} + \frac{z}{\frac{d}{c}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{a''} + \frac{y}{b''} + \frac{z}{c''} = 1;\ a, b, c \neq 0$$

3. a) Geben Sie die Äquivalenzumformungen bei der Umstellung an.

   b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Ebene $E: ax + by + cz = d,\ d \neq 0$ mit den Koordinatenachsen und vergleichen Sie die Koordinaten mit der Achsenabschnittsform.

   c) Gegeben ist die Ebenengleichung $E: 2x - y$ [illegible] $z = 4$. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen mithilfe der Achsenabschnittsform.

4. a) Bestimmen Sie die Ebenengleichung der Ebene E in Koordinatenform mit ganzzahligen Koeffizienten, wenn E die angegebenen Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen besitzt.

   (I) E_1: $S_x(2|0|0)$, $S_y(0|-3{,}5|0)$, $S_z(0|0|1{,}5)$

   (II) E_2: $S_x(-3|0|0)$, $S_y(0|-1{,}5|0)$

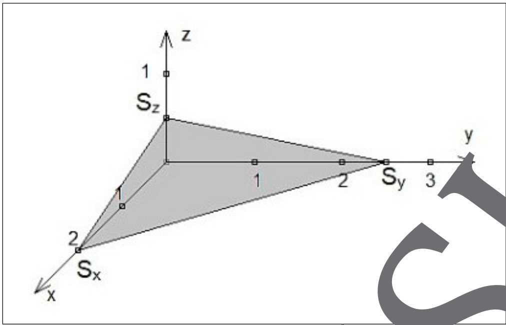
   (III) E_3: S_z [illegible] $(0|-1{,}5|0)$

   b) Zeichnen Sie die Ebene in ein räumliches Koordinatensystem.

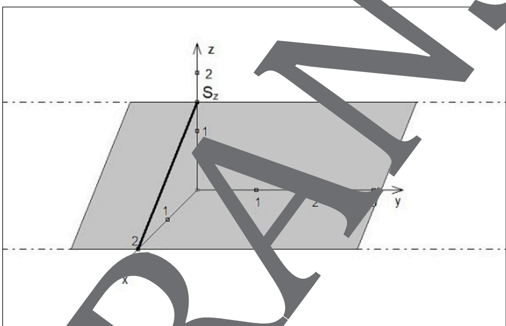
VORANSICHT

5. Bestimmen Sie die Ebenengleichung der Ebenen E in Koordinatenform mit ganzzahligen Koeffizienten, die ausschnittsweise in den Abbildungen dargestellt sind.

a)



b)



VORANSICHT

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend/weiterführend
- Fachlicher Bezug: Geometrie
- Kommunikation: Ergebnisse vorstellen
- Problemlösen: −
- Modellierung: −
- Medien: GTR/CAS, GeoGebra
- Methode: Einzel-/Partnerarbeit
- Inhalt in Stichworten: Ebenengleichungen (Koordinatenform, Parameterform, Achsenabschnittsform), Schnitt Ebene – Koordinatenachsen, Zeichnen von Ebenen ins räumliche Koordinatensystem

Autor: Günther Weber

Didaktisch-methodische Hinweise

Steht das Programm GeoGebra 3D nicht zur Verfügung, so werden die Beispiele der Lösung von Aufgabe 1a „pe[illegible]“ [illegible]. Aufgabe 2a kann dann entfallen.
Vor der Berechnung kann auch noch einmal wiederholt werden, welche Eigenschaft alle Punkte auf der [illegible]Ache (y-Achse, [illegible]-Achse) haben.

VORANSICHT

Lösung

1. a)

Koeffizienten	Ebenengleichung (beispielhaft)	Anzahl der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen	Lage der Ebene E bzgl. der Koordinatenachsen
$a, b, c \neq 0$	$2x - 3y + z = 4$	3	Die Ebene schneidet alle 3 Koordinatenachsen
$a = 0; b, c \neq 0$	$3y - 2z = -1$	2	E ‖ x-Achse
$b = 0; a, c \neq 0$	$4x - 3z = -2$	2	E ‖ y-Achse
$c = 0; a, b \neq 0$	$-3x + 5z = 6$	2	E ‖ z-Achse
$b = c = 0; a \neq 0$	$2x = 3$	1	E ‖ y-Achse; E ‖ z-Achse
$a = c = 0; b \neq 0$	$-3y = 7$	1	E ‖ x-Achse; E ‖ z-Achse
$a = b = 0; c \neq 0$	$-4z = 3$	1	E ‖ x-Achse; E ‖ y-Achse

Anmerkung: Es werden nur die Fälle betrachtet, in denen die Koordinatenachse nicht in der Ebene liegt.

b) Die Anzahl der Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen ist gleich der Anzahl der von 0 verschiedenen Koeffizienten a, b und c der Ebenengleichung.
Ist einer der Koeffizienten a, b und c der Ebenengleichung gleich 0, so existiert der zugehörige Schnittpunkt mit der Koordinatenachse nicht und die Ebene verläuft parallel zu der entsprechenden Koordinatenachse.

VORANSICHT

2. a) Für alle Punkte,
   - die auf der x-Achse liegen, gilt: $y = 0$, $z = 0$.
   - die auf der y-Achse liegen, gilt: $x = 0$, $z = 0$.
   - die auf der z-Achse liegen, gilt: $x = 0$, $y = 0$.

   E_1: Berechnen der Koordinaten von S_x; $y = z = 0$:

   $$2x = 6 \Rightarrow \quad x = 3 \qquad \Rightarrow S_x\left(3\,|\,0\,|\,0\right)$$

   Berechnen der Koordinaten von S_y; $x = 0$, $z = 0$:

   $$-3y = 6 \Rightarrow \quad y = -2 \quad \Rightarrow S_y\left(0\,|\,-2\,|\,0\right)$$

   Berechnen der Koordinaten von und S_z, $x = 0$, $y = 0$:

   $$4z = 6 \Rightarrow \quad z = 1{,}5 \quad \Rightarrow S_z\left(0\,|\,0\,|\,1{,}5\right)$$

   E_2: $S_x\left(\frac{4}{3}\,|\,0\,|\,0\right)$, $S_y\left(0\,|\,-2\,|\,0\right)$, S_z existiert nicht.

   E_3: S_x existiert nicht, S_y existiert nicht, $S_z\left(0\,|\,0\,|\,\frac{5}{12}\right)$

   b) Bestimmen der Koordinaten von $S_x\left(x\,|\,0\,|\,0\right)$:

   Durch Einsetzen des Ortsvektors von S_x in die Ebenengleichung und Auflösen der Vektorgleichung in Koordinatengleichungen erhält man das Gleichungssystem

   $$\begin{array}{ll} \text{I} & x = 1 + 2r - s \\ \text{II} & 0 = 1 + 4r - s \\ \text{III} & 0 = 1 - 3r + 1{,}5s \end{array}$$

   $$1{,}5 \cdot \text{II} + \text{III}: \qquad -2{,}5 = 3r \qquad \Leftrightarrow r = -\frac{5}{6}$$

   $$r = -\frac{5}{6} \text{ in III}: \qquad 0 = 1 + 2{,}5 + 1{,}5\ s \qquad \Leftrightarrow s = -\frac{7}{3}$$

   r und s in I: $\text{r und s in I}: x = 1 - \frac{5}{3} + \frac{7}{3} = \frac{5}{3} \qquad S_x\left(\frac{5}{3}\,|\,0\,|\,0\right)$

VORANSICHT

Ein Vergleich die Koeffizienten in der Ebenengleichung zeigt:
Im Nenner der Achsenabschnittsform der Ebenengleichung steht die x-Koordinate (y-Koordinate, z-Koordinate) des Schnittpunkts mit der x-Achse (y-Achse, z-Achse).

c) $E: \quad 2x - y + 1{,}6z = 4$

Die Gleichung wird durch d = 4 dividiert:

$$E'': \quad \frac{1}{2}x + \frac{-1}{4}y + \frac{2}{5}z = 1$$

Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit dem Kehrbruch multipliziert wird:

$$E'': \quad \frac{x}{\frac{2}{1}} + \frac{y}{\frac{-4}{1}} + \frac{z}{\frac{5}{2}} = 1$$

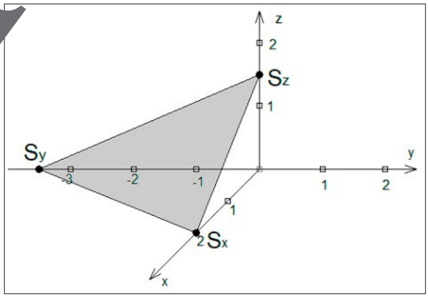
Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sind $S_x(2|0|0)$, $S_y(0|-4|0)$ und $S_z(0|0|2{,}5)$.

4. a) und b)

(I) Einsetzen der Koordinaten der Spurpunkte in die Achsenabschnittsform der Ebenengleichung führt zu:

$$E_1: \frac{x}{2} + \frac{y}{-3{,}5} + \frac{z}{1{,}5} = 1 \quad | \cdot 42$$

$$E_1: 21x - 12y + 28z = 42$$



Die Koordinatenform der Ebene E_1 lautet $21x - 12y + 28z = 42$.

Alternativ kann man zuerst die Dreipunktform der Ebenengleichung aufstellen und diese in die Koordinatenform umwandeln, was jedoch viel zeitaufwendiger ist.

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}.$$

VORANSICHT