

## T.13.8

### Wachstums- und Zerfallsprozesse

## Wachstum, eine endliche Geschichte

### Wachstumsvorgänge verstehen, berechnen und simulieren

Dr. Jürgen Franke



© RAABE 2024

© Foto: Dr. Jürgen Franke

Wir beobachten in der Natur Wachstumsprozesse. Pflanzen, Tiere und Menschen wachsen. Die Wirtschaft wächst. Krankheitserreger vermehren sich. Anhand von Modellen versuchen wir, die Prozesse zu verstehen und Entwicklungen vorherzusagen. Solche Modelle bestehen in einfacheren Fällen aus mathematischen Formeln, bei Bedarf aber auch aus komplizierten Algorithmen. Anhand mehrerer Beispiele soll mit verschiedenen Ansätzen Wachstum beschreiben werden.

---

## KOMPETENZPROFIL

<b>Klassenstufe:</b>	12/13
<b>Dauer:</b>	6–8 Unterrichtsstunden
<b>Kompetenzen:</b>	Analysekompetenz, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
<b>Methoden:</b>	Analyse, Auswertung, Computer- und Softwareeinsatz, Datenauswertung, Diagrammerstellung, Diskussion, digitale Übung
<b>Materialart:</b>	Excel, Grafik
<b>Thematische Bereiche:</b>	Exponentialfunktion, Logarithmen, Differenzialgleichungen und Integrale, Datenauswertung, Tabellenkalkulation, Zufallsexperimente

---

## Fachliche Hinweise

Wachstumsprozesse werden beobachtet und in Form mathematischer Modelle beschrieben. Neben der stark vereinfachten Darstellung des unbegrenzten exponentiellen Wachstums mit Exponentialfunktionen gibt es auch geeignete Darstellungen, um die real vorhandenen Grenzen des Wachstums zu berücksichtigen. Eine Darstellung des real begrenzten Wachstums ist die logistische Funktion.

Für sehr komplexe Vorgänge, die sich nicht mit einfachen Gleichungen beschreiben lassen, werden Modelle in Form von Algorithmen entwickelt. Je nach Rechenkapazität können solche Modelle mehr oder weniger umfangreich und damit mehr oder weniger genau die Realität beschreiben. Ein gutes Beispiel dafür ist die Wettervorhersage und auch Klimamodelle, für deren Berechnung es die Kapazität von Großrechnern braucht.

Ziel aller dieser Bemühungen ist einerseits das Verständnis der Prozesse, aber auch der Wunsch nach Vorhersage und möglichen Handlungsempfehlungen.

## Didaktisch-methodische Hinweise

Das Wissen über Exponentialfunktionen und Logarithmen wird vorausgesetzt. Ebenso der etwas fortgeschrittenere Umgang mit Tabellenkalkulationsprogrammen. Die Schülerinnen und Schüler können Tabellen erstellen, Grafiken einfügen, Tabellendaten visualisieren und Trendlinien anzeigen. Das Tabellenkalkulationsprogramm wird dann vor allem für das Epidemiemodell in **M 4** eingesetzt.

Differenzial- und Integralrechnung sind für das Verständnis der Ansätze in **M 3** Voraussetzung. Die Herleitung wird hier etwas verkürzt vorgestellt, um nicht zu weit vom Thema Wachstum abzulenken.

Wenn Differenzial- und Integralrechnung noch nicht bekannt sind, können Sie die logistische Funktion auch als gegeben vorstellen, mit den Funktionen aus **M 1** und **M 2** vergleichen und Modellrechnungen zum Thema Wachstum damit durchführen.

## Auf einen Blick

### Mathematische Beschreibung von Wachstumsvorgängen

**M 1** Exponentielles Wachstum

**M 2** Beschränktes Wachstum

**M 3** Logistische Funktion

**Benötigt:**  Taschenrechner  
 Tabellenkalkulationsprogramm

### Simulation mit verfügbaren Erkenntnissen

**M 4** Epidemiemodell

**Benötigt:**  Tabellenkalkulationsprogramm

## M 1 Exponentielles Wachstum

### Immer schneller, immer größer

Wachstum ist ein Begriff, den wir vor allem im Zusammenhang mit dem Wachstum von Pflanzen, Tieren und uns Menschen verwenden. Ökonomen und Politiker stellen stetiges Wirtschafts-Wachstum als erstrebenswert dar. Beim Wachstum in der Natur zeigt uns die Erfahrung, dass „die Bäume nicht in den Himmel wachsen“ also das Wachstum immer begrenzt ist. In der Wirtschaftspolitik tut man sich schwer, Grenzen des Wachstums anzuerkennen. Wenn man keine Grenzen in Betracht zieht, hat man es mit einem exponentiellen Wachstum zu tun. Da ist die Zuwachsrate stets proportional zur bereits existenten Größe. Für uns nur schwer vorstellbar ist das Ausmaß, das eine exponentiell wachsende Größe im Lauf der Zeit annehmen kann.

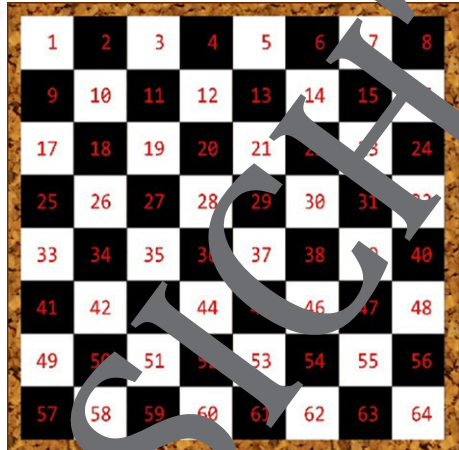
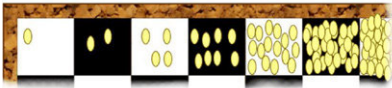
### Beispiel

Ein oft erzähltes Beispiel ist der Seerosenteich, dessen bewachsene Fläche sich jeden Tag verdoppelt. Am 24. Tag sei er komplett zugewachsen. Gerne wird dann die Frage gestellt, an welchem Tag eine Hälfte zugewachsen war (was natürlich am 23. Tag der Fall wäre), um dem Publikum das Prinzip des exponentiellen Wachstums zu verdeutlichen. Sie können diese Frage an beliebigen Personen in Ihrem Umfeld stellen und um eine spontane Antwort bitten. Vermutlich werden Ihnen nicht alle richtig antworten, weil das exponentielle Wachstum für uns schwer vorstellbar ist.



Foto: J. M. Garg / Wikimedia Commons /CC BY 3.0

## Aufgabe 1



Grafiken: Dr. Jürgen Franke

Es gibt die berühmte Legende<sup>1</sup> von dem Weisen, dem der König einen Wunsch erfüllen wollte. Der Weise bat darum, auf das erste Feld eines Schachbretts ein Reiskorn zu legen, auf das zweite Feld zwei Reiskörner, auf das dritte vier und immer so weiter auf jedes Feld doppelt so viel wie auf das Vorhergehende, bis alle 64 Felder voll wären. Der König zeigte sich über diesen, für ihn lächerlichen Wunsch sehr überrascht und sogar beleidigt. Nicht ahnend, worauf er sich da eingelassen hatte, gab er diese Bitte und befahl seinem Schatzmeister, den Reis auszuliefern. Erst als der Schatzmeister berechnet hatte, um wie viel Reis es sich handeln würde, erkannte der König, dass er eine solche Zusage niemals hätte geben dürfen.

- Erstellen Sie eine Tabelle für die ersten 8 Felder und tragen Sie die Anzahl der Reiskörner auf jedem Feld ein. Ergänzen Sie dann die Summe aller Reiskörner auf den bis dahin belegten Feldern. Damit sollten Sie ein Muster für die Berechnung erkennen. Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Anzahl Reiskörner auf jedem Feld auf. Wie berechnet sich die Summe? Berechnen Sie die Summe aller Reiskörner, die auf das Schachbrett gelegt werden sollten.
- Berechnen Sie das Gewicht des vom König gewährten Reisgeschenks unter der Annahme, dass 1000 Reiskörner ein Gramm wiegen.

1 [https://de.wikipedia.org/wiki/Sissa\\_ibn\\_Dahir](https://de.wikipedia.org/wiki/Sissa_ibn_Dahir), aufgerufen am 01.10.2024

# Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.  
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online  
14 Tage lang kostenlos!

[www.raabits.de](http://www.raabits.de)

