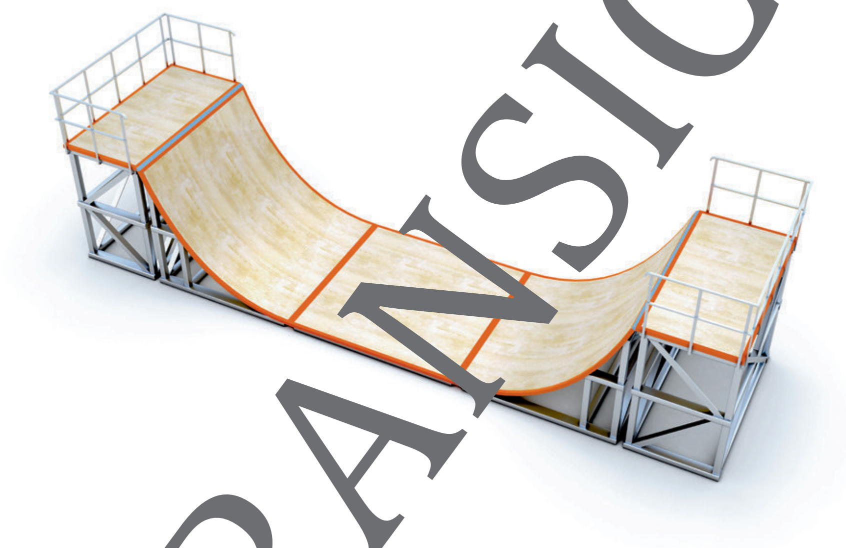
A.3.38

Ganzrationale Funktionen mit Parametern

Parameterbestimmung bei einer Parabelschar – Platzdeckchen, Herz und Skateboard-Rampe

Günther Weber



Parabeln und deren Eigenschaften kennen Ihre Schülerinnen und Schüler aus der Mittelstufe. Mit den Methoden der Analysis untersuchen die Jugendlichen Parabelscharen und bilden durch Tangenten bzw. durch Tangente und Normale zusammen mit der x-Achse Dreiecke. Zu vorgegebenen Winkeln bzw. Flächeninhalten bestimmen die Lernenden die zugehörigen Parameter der Funktionenschar. Gleiches geschieht bei Rotationskörpern, wenn eine Fläche um die x-Achse bzw. um die Symmetrieachse der Parabel rotiert. Die Bestimmung des Parameters der Funktionenschar wird anwendungsbezogen auf eine herzförmige Fläche bzw. eine Fläche, die die Form eines Platzdeckchens hat, sowie eine „Mini-Rampe“ (siehe Titelbild) übertragen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10/11/12/13
Dauer:	4–6
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Textkompetenz, Umgang mit Texten und Medien
Methoden:	Computer- und Softwareeinsatz, digitale Übung, Übung
Materialart:	GeoGebra-Datei, Grafik, Lernerfolgskontrolle
Inhalt:	Parabelschar, Achsensymmetrie, Nullstellen, Extrempunkt, Tangente, Normale, Bestimmen von Parametern (Winkel und Fläche im Dreieck), Integration, Spiegelung von Graphen, Umkehrfunktion, Volumen Rotationskörper, Flächenberechnung, Aufstellen einer Parabelgleichung

Didaktisch-methodische Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Ihre Schülerinnen und Schüler können Eigenschaften von Graphen zum Bestimmen von Parametern nutzen. Funktionsuntersuchungen, auch bei Funktionenscharen, bereiten ihnen keine Schwierigkeiten. Die Lernenden kennen die Formeln zur Berechnung des Flächeninhalts von Dreiecken sowie von Volumen und Mantelfläche bei einem Kegel. Sie können die Tangentengleichung in einem Punkt des Graphen sowie die zugehörige Normale bestimmen und wissen, wie die Steigung bzw. der Steigungswinkel mithilfe der ersten Ableitungsfunktion ermittelt wird. Die Jugendlichen können den Flächeninhalt einer durch den Graphen einer Funktion vorgegebenen Fläche mithilfe von Integralen berechnen. Die Lernenden wissen, dass der Graph der Umkehrfunktion aus dem Graph einer Funktion durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden hervorgeht. Das rechnerische Verfahren zur Bestimmung der Umkehrfunktion muss nicht bekannt sein und kann im Unterricht erläutert werden. Die Jugendlichen können zu vorgegebenen Eigenschaften Parabelgleichungen aufstellen.

Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan

https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOSt_Mathematik.pdf (aufgerufen am 08.11.2023) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler …

- verwenden das notwendige Kriterium und das Vorzeichenwechselkriterium zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten,
- interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen,
- bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen,
- bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben"),
- ermitteln Flächeninhalte (Volumen von Rotationskörpern, Bogenlänge von Graphen) mithilfe von bestimmten Integralen.

Zudem nutzen die Lernenden mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge, um Sachverhalte zu veranschaulichen bzw. Ergebnisse zu kontrollieren.

Methodisch-didaktische Anmerkungen:

Bei vielen Aufgabenstellungen kann der Sachverhalt mithilfe von GeoGebra veranschaulicht und der Parameter näherungsweise bestimmt werden. Insbesondere bei schwächeren Lerngruppen empfiehlt sich diese Vorgehensweise. Vor der Bearbeitung von **Aufgabe 3** sprechen Sie im Unterricht durch, wie die Volumenbestimmung an der Symmetrieachse der Parabelschar auf die Volumenberechnung bei Rotation der Fläche um die x-Achse zurückgeführt werden kann. Bei **Aufgabe 4** weisen Sie darauf hin, dass die Fläche symmetrisch ist und die Umkehrfunktion für die Berechnung der Aufgabe nicht unbedingt benötigt wird. Bei **Aufgabe 6** erwähnen Sie, dass man die Rechnungen in einem geeigneten Koordinatensystem durchführen sollte, indem man die vorgegebenen Einheiten günstig umwandelt.

Aufgaben

M 1

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}k\cdot x+1, k\in\mathbb{R}$.

1.

a) Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung der Symmetrieachse des Graphen ... Funktionenschar f_k in Abhängigkeit von k.

b) Bestimmen Sie k so, dass die Nullstellen der Funktionenschar

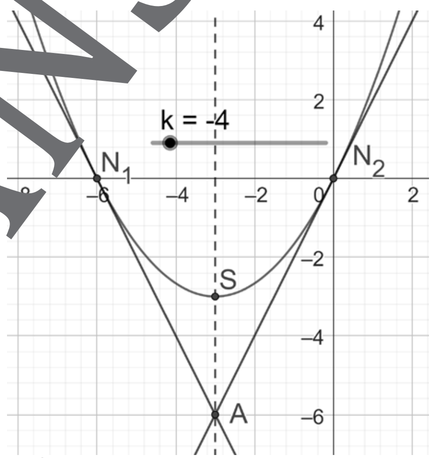
$$x_1=\frac{1}{2}\cdot\left(-\sqrt{6}+3\sqrt{2}\right) \text{ und } x_2=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{6}+3\sqrt{2}\right) \text{ sind.}$$

c) Bestimmen Sie ein Intervall für k so, dass die Funktionswe... der Funktion...schar nicht negativ sind.

d) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar den gleichen Sc...ttpunkt S_y mit der y-Achse haben. Die Tangente in S_y an die Graphen ... Schar und ... zugehörige Normale in S_y schneiden für $k\neq 0$ die x-Achse in de... Punkten N_T und ... .
Bestimmen Sie Werte für k so, dass der Flä... ...reiecks $N_TN_NS_y$ den Flächeninhalt 4 FE hat.

2. Es sei $g_k(x)=f_k(x)-1$ mit $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

a) Der Graph der Funktionensch... schneidet die x-Achse in den Punkten N_1 sowie N_2 , die Tangenten an den Graphen der Funk... ...den Schnittpunkten mit der x-Achse schneiden sich im Punkt A. ... ist ...er Scheitelpunkt der Parabel.
Bestimmen S... ..., dass das D...eck N_1N_2A rechtwin...lig gleichschenkli... (...ichsei...)



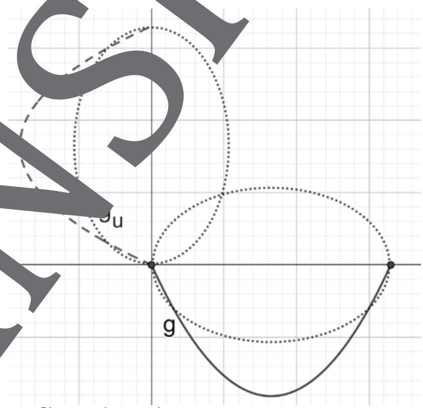
Grafik: Günther Weber

b) Bestimmen Sie Werte für k so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2A doppelt so groß ist wie der Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2S.

c) Bestimmen Sie Werte für k so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2A 1,5-mal so groß ist wie der Flächeninhalt der Fläche, die von der x-Achse und dem Graphen der Funktion eingeschlossen wird.

d) Die Tangente in vom Ursprung verschiedenen Schnittpunkt mit der x-Achse $N\left(\frac{3}{2}k \mid 0\right)$ schneidet die y-Achse im Punkt $S_y\left(0 \mid -\frac{3}{4}k^2\right)$. Der Ursprung, der Punkt N und der Punkt S_y bilden ein Dreieck, das um die x-Achse rotiert und als Rotationskörper ein Kegel entsteht.
Bestimmen Sie Werte für k so, dass der Radius des Kegels doppelt so groß ist wie die Höhe des Kegels. Berechnen Sie zu diesem Kegel das Volumen und die Mantelfläche.

3. Die Fläche, die ein Graph der Funktionenschar g_k mit dem nichtnegativen Teil der x-Achse einschließt, rotiert um die Symmetrieachse der Parabel, sodass ein Rotationskörper entsteht. Das Rotationsvolumen des Körpers ist genauso groß wie das Rotationsvolumen des Körpers, der bei Rotation der an der ersten Winkelhalbierende gespiegelten Fläche bei Rotation um deren Symmetrieachse entsteht.



Grafik: Günther Weber

Zeigen Sie, dass die Funktionenschar

$$\bar{g}_k(x) = \begin{cases} \frac{3k-\sqrt{48x+9k^2}}{4}, & \text{für } 0 \le x \le \frac{3k}{4} \\ \frac{3k+\sqrt{48x+9k^2}}{4}, & \text{für } \frac{3k}{4} \le x \le \frac{3k}{2} \end{cases}$$

die Umkehrfunktion zur Funktionenschar g_k ist und bestimmen Sie k so, dass das Volumen des Rotationskörpers $\frac{27}{2} \cdot \pi$ Volumeneinheiten beträgt.

RAAbits Online
@RAABE

Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen

Testen Sie RAAbits Online 14 Tage lang kostenlos!

www.raabits.de

RAAbits Online – Das Portal für Unterrichtsmaterialien und Schulorganisation