Bau und Flug eines Lenkdrachens

Günther Weber

Das Basteln und „Fliegenlassen“ von Drachen bereitet Jugendlichen, aber auch Erwachsenen großen Spaß. Mit den Werkzeugen der Analysis untersuchen Ihre Schülerinnen und Schüler den Bau eines speziellen Lenkdrachens. Beim „Fliegenlassen“ wird anschließend die Lage des Drachens in der Luft ermittelt.

Bau und Flug eines Lenkdrachens

Oberstufe (grundlegend/weiterführend)

Günther Weber

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

im Bereich Analysis ihr Können und Wissen anzuwenden über Ableitungs- und Integralfunktionen sowie Gleichungssysteme und im Bereich Analytische Geometrie über die Lage geometrischer Objekte im Raum in einem konkreten, realitätsnahen Beispiel.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt

einfaches Niveau — mittleres Niveau — schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Aufgaben	M1	AB

Kompetenzprofil:

Inhalt: Exponentialfunktion, Ganzrationale Funktion [illegible]. Grades, Achsensymmetrie, Null- und Schnittstellen, Tangente und Berührpunkt, Schnittwinkel, bestimmtes Integral, Prozentrechnung, Steigungswinkel, Schnitt von Ebenen, (Einheits-)Richtungswinkel, Lage von Punkten im Raum

Medien: GTR/CAS, GeoGebra

Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Ihre Schülerinnen und Schüler sollten aus dem Sachkontext heraus die Definitionsmenge einer Funktion bestimmen können. Der Zusammenhang zwischen dem Term einer Funktion und dem Term der an der y-Achse gespiegelten Funktion ist bekannt. Sie wissen, dass die Steigung einer Tangente an einem Graph der Funktion f im Punkt $P(p|f(p))$ gleich dem Funktionswert der Ableitungsfunktion an der Stelle $x = p$ ist. Ebenso kennt Ihre Klasse den Zusammenhang der Steigungen zweier senkrecht aufeinander stehender Geraden. Die Lernenden sollten den Schnittwinkel von Geraden und den Abstand zweier Punkte berechnen können. Sie können den Funktionsterm von ganzrationalen Funktionen bestimmen. Im Allgemeinen sind die Jugendlichen sicher im Umgang mit ganzrationalen Funktionen bzw. Exponentialfunktionen und sind dazu fähig, diese mit den Ableitungsregeln zu differenzieren und zu integrieren.

Im Bereich der Analytischen Geometrie können Ihre Schülerinnen und Schüler nachweisen, dass zwei Ebenen senkrecht aufeinander stehen, und sie können die Gleichung der Schnittgerade zweier Ebenen bestimmen. Die Jugendlichen können mithilfe von Einheitsrichtungsvektoren die Lage von Punkten im Raum bestimmen.

Von Vorteil ist es, wenn die Lernenden sicher im Umgang mit einem GTR/CAS-Rechner sind.

Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/331/gost_klp_m_2023_06_07.pdf (aufgerufen am 22.01.2024) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen im Bereich Analysis:

Die Schülerinnen und Schüler ...

– bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“),
– bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von [...] Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und wenden die Produkt- und Kettenregel an,
– bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen,

– ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion.

Kompetenzerwartungen aus dem Bereich der Analytischen Geometrie sind:

Die Schülerinnen und Schüler ...

– wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum,
– stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar,
– stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar,
– deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es,
– untersuchen mithilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung),
– untersuchen Lagebeziehungen zwischen Ebenen.

Zudem nutzen die Lernenden mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge, um Sachverhalte zu veranschaulichen bzw. Ergebnisse zu kontrollieren.

Methodisch-didaktische Anmerkungen:

Vor der Bearbeitung der Aufgaben fragen Sie bei den Schülerinnen und Schülern nach, wer schon einmal einen Drachen selbst gebastelt oder einen Drachen fliegen gelassen hat und was dabei zu beachten ist.

[Tipps zum Drachensteigen lassen (leben-und-erziehen.de).]

Insbesondere bei leistungsschwächeren Lerngruppen kann der Rechenweg bei Aufgabe 1g) beschrieben und mithilfe der GeoGebra-Datei (siehe Datei **Aufgabe_1g.ggb**) veranschaulicht werden.

Bei Aufgabe 2) gehen Sie vor der Bearbeitung auf die Bestimmung der Punkte mithilfe von Einheitsrichtungsvektoren ein. Alternativ kann auch die Bestimmung der Punkte als Schnitt einer Gerade mit einer Kugel erfolgen (siehe Datei: **Aufgabe_2e.ggb**).

Die Aufgaben beinhalten eine Vielzahl von Aufgabenstellungen, wie sie auch im Abitur vorkommen können. Sie eignen sich daher auch zur Vorbereitung auf das Abitur.

Aufgaben

M1

1. Lea findet, dass der Drachen ihres Bruders Nils, der die klassische Form eines Drachens hat, sich nicht gut lenken lässt und möchte deshalb einen Drachen in einer anderen Form bauen. Das Grundgerüst besteht wie beim klassischen Drachen aus zwei Leisten, die senkrecht miteinander verbunden werden. In einem geeigneten Koordinatensystem liegen diese beiden Leisten auf den Koordinatenachsen ($1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 2\,\text{dm}$). Die Spitze und der Fuß des Drachens liegen auf der y-Achse, die beiden anderen Eckpunkte auf der x-Achse. Die Umrisse des Drachens bestehen aus biegsamen Glasfaserleisten. Sie haben die Form eines Graphen einer Exponentialfunktion, dem an der y-Achse gespiegelten Graphen dieser Exponentialfunktion und einer Parabel.
   Die Umrisslinie des Drachen im 1. Quadranten hat die Form des Graphen der Funktion $f(x) = -(x-2)\cdot\left(e^{x-2} - (x-2)\right), x \in D_f$.

   a) Bestimmen Sie rechnerisch den Definitionsbereich D_f der die Umrisslinie des Drachen im 1. Quadranten darstellt.
   Hinweis: Die Gleichung $e^{x-2} - x = -2$ hat keine Lösung.

   b) Bestimmen Sie Funktionsterm und Definitionsmenge der Funktion g(x) des an der y-Achse gespiegelten Graphen.

   Die beiden durch die Graphen der Funktionen f und g gegebenen Umrisslinien werden ergänzt durch eine Parabel p(x), die diese Graphen nahtlos fortführt.

   c) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel, wenn der Drachen eine Breite von 80 cm und eine Länge von 1 m haben soll.

   d) Skizzieren Sie den gesamten Umriss des Drachens in der Abbildung unten.