Vermischte Übungen aus Analysis: Umkehrfunktionen und Funktionenscharen, Integrale, Ableitungen und Grenzwerte

Alfred Müller

Drei Übungsblätter stellen die Schülerinnen und Schüler vor verschiedene Herausforderungen aus dem Bereich der Analysis. Integrale und Ableitungen sind ebenso ein Teil der Aufgaben wie Grenzwerte und einfache Differenzialgleichungen. Auch das Schließen auf eine Funktionsgleichung anhand eines vorgegebenen Graphen kommt in den Übungen vor, ebenso eine Textaufgabe, bei der die Jugendlichen den Beschreibungstext in die Sprache der Mathematik übersetzen müssen.
In den meisten Beispielen kommen rationale Funktionen oder Exponentialfunktionen vor, vereinzelt müssen die Schülerinnen und Schüler auch mit dem Logarithmus oder den trigonometrischen Funktionen arbeiten.
Das Niveau der Beispiele bewegt sich von sehr einfach bis schwierig.

RAABE, KLASSE SCHULE

Vermischte Übungen aus Analysis: Umkehrfunktionen und Funktionenscharen, Integrale, Ableitungen und Grenzwerte

Alfred Müller

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

- Exponentialfunktionen
- Gebrochenrationale Funktionen
- Wurzelfunktionen
- Trigonometrische Funktionen
- Integrieren
- Differenzieren
- Differenzialgleichung
- Bildung von Grenzwerten
- Extremwertaufgaben
- Textaufgaben

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt

BA Bildanalyse

einfaches Niveau

mittleres Niveau

schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Umkehrfunktion, Fließbänder und Funktionenschar	M1	AB, BA
Integrale, Ableitungen, Grenzwerte	M2	AB, BA
Exponentialfunktionen und Extremwertaufgabe	M3	AB

Kompetenzprofil:

Inhalt: Exponentialfunktionen, gebrochenrationale Funktionen, Wurzelfunktionen, Trigonometrische Funktionen, Integrieren, Differenzieren, Differenzialgleichung, Bildung von Grenzwerten, Extremwertaufgabe, Textaufgabe

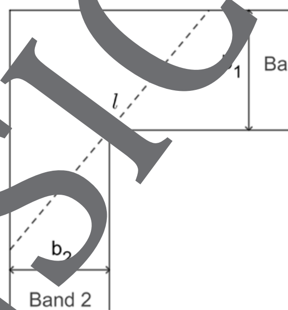
Medien: GTR/CAS, Formelsammlung

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Umkehrfunktion, Fließbänder und Funktionenschar **M1**

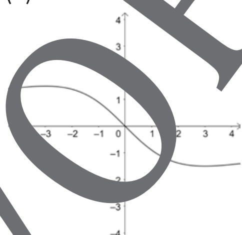
1.
   a) Die Funktion $f(x) = x$ stimmt mit ihrer Umkehrfunktion überein, d. h. $f^{-1} = f$. Geben Sie wenigstens drei weitere Funktionen f an, bei denen dies ebenfalls zutrifft.
   b) Die Graphen der Funktionen $f_1(x) = e^{-x}$ und $f_2(x) = -x \cdot e^{-x}$ schneiden sich für $x = -1$. Für welchen Wert u mit $u > -1$ schneidet die Gerade $x = u$ die größte Länge zwischen den Graphen aus und wie groß ist diese?

2. Zwei senkrecht aufeinandertreffende Fließbänder (Band 1 mit der Breite b_1 und Band 2 mit der Breite b_2) transportieren Baumstämme. Wie lang dürfen die Stämme maximal sein, damit sie nicht „hängenbleiben“, wenn man die Dicke der Stämme vernachlässigt und der Transportvorgang auf die Ebene der Bänder beschränkt bleibt? Lösen Sie zuerst den Fall für $b_1 = b_2 = b$, dann allgemein und berechnen Sie dann daraus die maximale Stammlänge für den Fall $b_1 = 3\,m$ und $b_2 = 2\,m$.

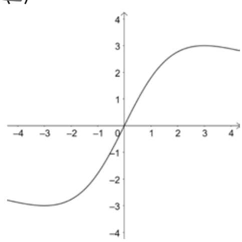


3. Gegeben ist die Schar von Funktionen f_a durch ihre Gleichung $f_a(x) = \frac{2a^2x}{x^2 + a^2}$, $a \in \mathbb{R}^+$ mit Graphen G_a.
   a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge D_a von f_a an und untersuchen Sie die Graphen G_a auf Symmetrie sowie auf ihr Verhalten für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.
   b) Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte von G_a und bestimmen Sie deren Art ohne Berechnung der 2. Ableitung.
   c) Untersuchen Sie, ob einer der folgenden Graphen einer der Graphen G_a sein kann.

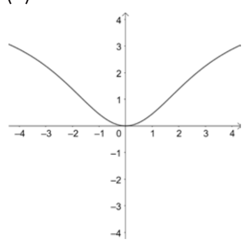
(A)



(B)



(C)



Grafiken: Günter Gerstbrein

M3 Exponentialfunktionen und Extremwertaufgabe

1. Gegeben ist die in $D=\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x)=8\cdot\left(\frac{9}{16}-x^2\right)\cdot e^x$ mit Graphen G.

   a) Untersuchen Sie den Graphen G auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und auf Asymptoten und bestimmen Sie das Verhalten von f im Unendlichen.

   b) Bestimmen Sie die Extremwerte nach Art und Lage sowie die Abszissen der Wendepunkte.

   c) Zeichnen Sie den Graphen G im Intervall $I=[-8;1]$ (1 LE = 1 cm).

   d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A_1, die der Graph G zwischen den Nullstellen mit der x-Achse einschließt.

   e) Der Graph G schließt im 3. Quadranten mit der x-Achse eine Fläche A_2 ein, die sich bis ins Unendliche erstreckt. Zeigen Sie durch Rechnung, dass diese Fläche A_2 endlich ist.

2. Gegeben ist die in $D=\mathbb{R}$ definierte Funktion $g(x)=\frac{x^2}{e^x}$ mit Graphen G´.

   a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie die Koordinaten des Hochpunktes H. Hat der Graph G´ Wendepunkte?

   b) Zeichnen Sie den Graphen G´ im Intervall $[-3;5]$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem

   c) Im 1. Quadranten wird von einem Punkt $P(x\,|\,y)$ des Graphen G´ das Lot auf die x-Achse gefällt mit dem Lotfußpunkt L. Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks OLP, wenn O der Koordinatenursprung ist.

   d) Bestimmen Sie eine Stammfunktion G(x) der Funktion g. Bestimmen Sie dann den Flächeninhalt des im 1. Quadranten nach rechts unbegrenzten Flächenstücks zwischen dem Graphen G´ und der x-Achse.

3. Beim Bau eines Tunnels muss der Querschnitt des Tunnels ein gleichschenkliges Trapez mit dem Flächeninhalt $A=24\sqrt{3}\ \text{m}^2$ sein, wobei die Seitenwände gegenüber der Bodenfläche einen Winkel von 60° bilden sollen. Bestimmen Sie die Abmessungen der Querschnittsfläche, wenn diese minimalen Umfang haben soll.