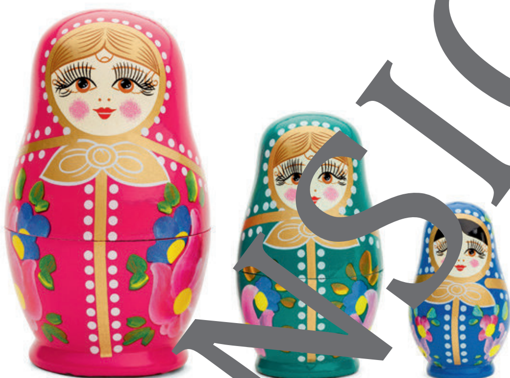
Matrjoschka – Eine Holzfigur als mathematisches Konstrukt

Wolfgang Lübbe



© Michael Burrell / iStock / Getty Images Plus

Die ineinander geschachtelten hölzernen Figuren – Matrjoschkas – unterschiedlicher Größe sind für viele Touristen ein beliebtes Souvenir. Durch die geschwungene und gleichmäßige Form lassen sie sich aber auch mathematisch mit den Mitteln der Analysis beleuchten und berechnen.

Die Bearbeitung dieser Aufgaben kann der Motivation der Schülerinnen und Schüler dienen, sich mit der der Integralrechnung als Fortsetzung der Differentialrechnung zu beschäftigen. Dabei erkennen die Jugendlichen, dass die Integralrechnung verschiedene Aufgabenstellungen wesentlich vereinfacht, die andernfalls nur näherungsweise und mit erheblich größerem Aufwand zu lösen wären. Dies ist beispielsweise bei folgenden Problemen der Fall:

– Berechnung der Bogenlänge nicht geradlinig verlaufender Funktionen
– Berechnung einer Fläche zwischen dem Graphen einer nicht geradlinig verlaufenden Funktion und der x-Achse
– Berechnung eines Volumens, das durch die Rotation einer nicht geradlinig verlaufenden Funktion um die x-Achse entsteht

Das Hauptziel der Aufgaben ist die Motivation. Alle anderen Lösungs- und Bearbeitungsschritte sind Neben- und Mitnahmeeffekte.

RAABE KLASSE SCHULE

Matrjoschka – Eine Holzfigur als mathematisches Konstrukt

Oberstufe (grundlegend/weiterführend)

Wolfgang Lübbe

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

Durch das anschauliche Beispiel der Matrjoschka-Puppe soll die Bearbeitung der Aufgaben motivierend wirken. Die Jugendlichen lösen Aufgaben sowohl mittels Näherungsverfahren als auch per Integration. Da letzteres einerseits die Genauigkeit der Ergebnisse erhöht und andererseits den Aufwand verringert, erkennen die Lernenden so die Notwendigkeit des Erwerbs neuer Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten.

Hinweise – Einsatz im Unterricht

Niveau

Die Teile der Lösungswege, die **ohne** Anwendung der Integralrechnung bearbeitet werden, stellen ein niedriges Niveau dar. Dieser Teil Routinearbeit kann von jedem Schüler und jeder Schülerin (wenn notwendig nach kurzer Erläuterung durch den Lehrer bzw. die Lehrerin oder einen leistungsstärkeren Schüler oder eine leistungsstärkere Schülerin) jeweils problemlos und selbstständig gelöst werden.

Die Teile **mit** Anwendung der Integralrechnung haben höheres Niveau; sollten also, zumindest teilweise, im Unterrichtsgespräch bzw. im Team Leistungsstärkere/Leistungsschwächere bearbeitet werden.

Einleitung

Am Anfang kann vielleicht folgende nicht ganz ernst gemeinte Bemerkung stehen:
„Mathematik ist nicht mein Ding, ich kenne nur die vier Grundrechenarten
Addition – Subtraktion
Frustration – Kapitulation“
Seit Beginn ihrer Schulzeit haben die Schülerinnen und Schüler der Oberstufe die verschiedenen Stufen der Rechenoperationen
1. Stufe: Addition – Subtraktion
2. Stufe: Multiplikation – Division
3. Stufe: Potenzieren – Radizieren/Logarithmieren

als die jeweils entgegengesetzten Operationen (Gegenoperationen) kennengelernt.
In der Oberstufe kam dann als 4. Stufe mathematischer Operationen die Differentialrechnung, das Ableiten von Funktionen, als erster Teil der Infinitesimalrechnung hinzu.
Genauso wie bei den vorher genannten Operationen stellt auch die Integralrechnung, das Bilden der Stammfunktionen (Aufleiten einer Funktion), die Gegenoperation einer mathematischen Operation, in diesem Fall der Differentialrechnung, dar. Dieser Zusammenhang sollte den Schülerinnen und Schülern grundsätzlich verdeutlicht werden.

Um die motivierende Wirkung dieser Aufgaben hervorzuheben, ist, nachdem die Schülerinnen und Schüler die Regeln zum Bilden von Stammfunktionen kennengelernt haben, die folgende Vorgehensweise empfehlenswert.

Rekonstruktion der Funktionsgleichung

Aufbauend auf den bei der Differentialrechnung erworbenen Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten sollte zunächst die der Aufgabenstellung entsprechende Funktionsgleichung f(x) rekonstruiert werden. Auch die Kontrolle dafür, dass die Gleichung die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt, erscheint sinnvoll.
Anschließend kann die Querschnittsfläche der Figur im Koordinatensystem dargestellt werden.

Berechnung des Umfangs

Der Reihenfolge der Teilaufgaben folgend, kann nun die Berechnung des Querschnittsumfangs vorgenommen werden. Diese Berechnung empfehle ich zunächst näherungsweise vorzunehmen, d. h. **ohne** Nutzung der Integralrechnung. Dazu kann der Graph der rekonstruierten Funktion f(x) in den entsprechenden Grenzen in mehrere (viele) Teilintervalle gesplittet werden. Die Streckenlängen dieser Teilintervalle können näherungsweise mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnet werden. Dabei sollte den Schülerinnen und Schülern auch verdeutlicht werden, dass eine Vergrößerung der Anzahl der Teilintervalle zu einer größeren Genauigkeit der Bogenlänge führen würde.
Die noch fehlenden Stücke des Querschnittsumfangs (Gerade, Teilkreis) können problemlos ergänzt werden.

Berechnung der Querschnittsfläche

Entsprechend dieser Vorgehensweise kann dann auch bei der Berechnung der Querschnittsfläche zwischen der Funktion f(x) und der x-Achse verfahren werden. Dabei wird die zu betrachtende Fläche in zu den Achsen parallele Rechtecke aufgeteilt. Dadurch kann die Berechnung der Fläche wieder mit bekannten Methoden **ohne** Integralrechnung erfolgen, die den Schülerinnen und Schülern bekannt sind. Auch hierbei könnte durch die Verwendung schmalerer Rechtecke eine Verbesserung der Genauigkeit erreicht werden. Möglich wäre ebenfalls, anstelle der Rechtecke entsprechende Trapeze zu verwenden, um so der wahren Größe der Fläche noch näher zu kommen. Der noch fehlende Teil der Querschnittsfläche (Teilkreis) wird ohne Schwierigkeiten ergänzt.

Berechnung des Rotationsvolumens und der Masse

Auch die anschließende Berechnung des Rotationsvolumens der Funktion f(x) um die x-Achse erfolgt entsprechend der oben beschriebenen Verfahrensweise zunächst **ohne** Nutzung der Integralrechnung. Dazu wird das zu berechnende Volumen als eine Aneinanderreihung von Kegelstümpfen betrachtet. Wie auch bei den vorhergehenden Überlegungen führt eine größere Anzahl von Kegelstümpfen zu einer größeren Genauigkeit des Ergebnisses.

Der noch unberücksichtigte Teil des Volumens (Halbkugel) kann leicht ergänzt werden. Da der Rechenaufwand für diese Vorgehensweise recht hoch ist, empfiehlt es sich, diese Rechnungen in Form einer Hausaufgabe erledigen zu lassen. Auch Gruppenbildung zur Realisierung von Routinearbeiten ist denkbar.
Zur Berechnung der Masse der Figur erscheint der Hinweis, dass es sich um einen Hohlkörper handelt, angebracht.

Berechnung der Oberfläche

Schwerpunkt der letzten Teilaufgabe – Berechnung der Oberfläche der Figur – ist die Berechnung der Mantelfläche des durch die Rotation des Graphen der Funktion f(x) entstehenden Körpers. Diese Berechnung kann wieder näherungsweise auf der Basis der Berechnung der Bogenlängen als Summe der Mantelflächen von Kegelstümpfen erfolgen. Vor allen Dingen (vielleicht sogar ausschließlich) sollte sie aber mithilfe der in der Integralrechnung verwendeten Formel vorgenommen werden.

Gegenüberstellung: Näherung – Integration

Der wichtigste Teil des Unterrichts besteht im Folgenden:

Nach Berechnung der Näherungslösungen (Querschnittsumfang, Querschnittsfläche, Rotationsvolumen) sollte jeweils unmittelbar die Berechnung der wahren Größe mithilfe der Integralrechnung erfolgen, um so den Lernenden die Verkürzung und die Vereinfachung dieser Lösungswege und die höhere Genauigkeit der Ergebnisse vor Augen zu führen und sie so für die Nutzung der Integralrechnung im weiteren Verlauf des Unterrichts, d. h. für die Bearbeitung weiterer, besonders praxisnaher Aufgabenstellungen, zu motivieren.
Bei der Berechnung der Fläche, die die Funktion f(x) mit der x-Achse einschließt, sollte auch die Kontrolle der Stammfunktion F(x) entsprechend dem Zusammenhang F´(x) = f(x) genutzt werden.
Für den weiteren Unterricht ergeben sich durch die Modifikation der vorgestellten Aufgaben zahlreiche Möglichkeiten, wie an einigen wenigen Beispielen dargestellt. Solche Modifikationen sind auch für Hausaufgaben geeignet.
Die Bearbeitung ähnlicher Rotationskörperformen (wie z.B. Bowlingkegel, Flaschen, Pokale, Vasen, Trinkgläser, etc.) dient der weiteren Übung und Festigung. Dabei sind der Fantasie der Schülerinnen und Schüler keine Grenzen gesetzt.

Aufgaben

M2

Die Gesamthöhe der Figur beträgt 8 cm. Die obere Begrenzung bildet eine Halbkugel mit Radius $r = 2$ cm.

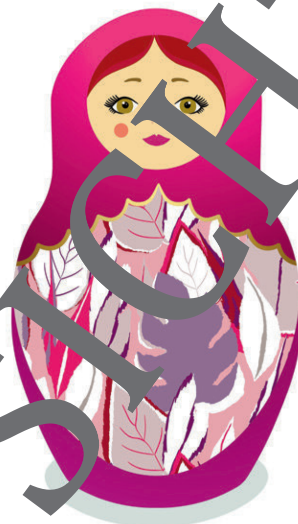
Die untere Begrenzung ist kreisförmig ($r = 2$ cm).

Die übrige Körperform kann durch die Rotation einer Funktion dritten Grades f(x) beschrieben werden.

Die Funktion f(x) hat ein lokales Maximum $E_{max}(2|3)$.

Die Figur ist ein Hohlkörper mit einer Wandstärke von $d = 2$ mm.

Die Figur besteht aus Fichtenholz mit der Dichte $\rho = 0{,}47\frac{g}{cm^3}$.



orensila / iStock / Getty Images Plus

Lösen Sie folgende Aufgaben:

1. Rekonstruktion der Funktionsgleichung f(x)
2. Grafische Darstellung des Querschnitts
3. Berechnung des Querschnittsumfangs
4. Berechnung der Querschnittsfläche
5. Berechnung des Gesamtvolumens
6. Berechnung der Masse der Figur
7. Berechnung der Oberfläche der Figur