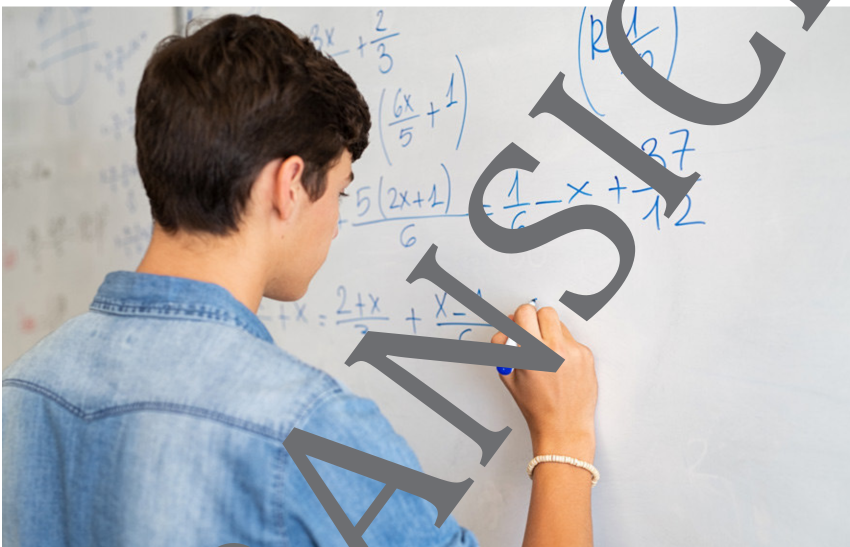
Kosinus und Arkustangens, Logarithmus und Exponentialfunktion – Übungstests aus Analysis

Alfred Müller



© Ridofranz / iStock / Getty Images Plus

Fünf Übungstests unterstützen Sie bei der Leistungsüberprüfung Ihrer Schülerinnen und Schüler oder helfen den Jugendlichen dabei, ihre eigenen Fähigkeiten einzuschätzen. Die Aufgaben eignen sich auch zur Vorbereitung auf das schriftliche Abitur. Die Zeitvorgabe sowie der Bewertungsschlüssel sorgen dabei für realistische Prüfungsbedingungen.

Inhaltlich decken die Aufgaben ein breites Spektrum der Analysis ab. Die Lernenden arbeiten mit Funktionenscharen mit Kosinus oder Exponentialfunktion, untersuchen einen Halbkreis, der sich durch eine Wurzelfunktion darstellen lässt, und befassen sich mit Logarithmus und Arkustangens. Dabei setzen sie ihre Kenntnisse in der Differenzialrechnung ein und wenden zum Integrieren sowohl die Substitutionsmethode als auch die partielle Integration an.

Kosinus und Arkustangens, Logarithmus und Exponentialfunktion – Übungstests aus Analysis

Alfred Müller

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

die Anwendung ihres Wissens und ihres Könnens in abiturrelevanten Aufgaben. Die Zeitvorgaben ermöglichen auch die Simulation einer realen Prüfungssituation und fördern ihr Zeitmanagement.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt

● einfaches Niveau ■ mittleres Niveau ▲ schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Funktionenschar mit Kosinus	M1	AB
Funktionenschar mit Exponentialfunktion	M2	AB
Halbkreis und Wurzelfunktion	M3	AB
Rationale Funktion und Logarithmus	M4	AB
Arkustangensfunktion	M5	AB

Differenzierung

Material	M1	M2	M3	M4	M5
Niveau	■	▲	▲	●	▲

Kompetenzprofil:

Inhalt: Kosinus, Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion, Wurzelfunktion, Rotation, Halbkreis, Rotationskörper, Arkustangens, Integrieren, Substitutionsmethode, partielle Integration, Differenzieren, Stetigkeit, Kurvendiskussion, Skizzieren von Graphen, Grenzwerte, Regel von de L'Hospital, Funktionenscharen, Stamm- und Integralfunktionen, (Wende-)Tangente, Schnittwinkel, (hebbare) Definitionslücke

Medien: GTR/CAS, GeoGebra

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Funktionenschar mit Kosinus **M1**

1. Die in $D_a = \mathbb{R}$ definierte Schar von Funktionen f_a mit der Gleichung $f_a(x) = 1 + a \cdot \cos x,\ a \in \mathbb{R}^+$ und Graphen G_a soll in $D = \left]-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right[$ betrachtet werden.
   a) Bestimmen Sie diejenigen Werte $a \in \mathbb{R}^+$, für die Nullstellen von f_a existieren. Berechnen Sie dann Art und Lage der Extremwerte sowie die Koordinaten der Wendepunkte der Graphen G_a. **[8 BE]**
   b) Zeichnen Sie den Graphen G_1 für a = 1 in D. Verwenden Sie: 1 LE = 2 cm; $\pi \approx 3$ LE. **[4 BE]**

2. Gegeben ist ferner die in $D_g = \mathbb{R}$ definierte Schar von Funktionen g_a durch ihre Gleichung $g_a(x) = 1 + \cos ax,\ a \in \mathbb{R}^+$ und Graphen G_{g_a}, die ebenfalls in $D = \left]-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right[$ betrachtet werden.
   a) Geben Sie die Periode aller Funktionen g_a an und zeichnen Sie den zu $a = \frac{1}{2}$ gehörenden Graphen der Funktion $g_{\frac{1}{2}}$ in obiges Koordinatensystem. **[4 BE]**
   b) Die Graphen der Funktionen f_1 und g_1 schneiden sich in D in zwei Punkten. Bestimmen Sie deren Abszissenwerte. **[4 BE]**
   c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die die Graphen der Funktionen f_1 und $g_{\frac{1}{2}}$ miteinander einschließen. **[6 BE]**

3. Funktionenzusammenhang
   a) Bestimmen Sie ein Intervall $I = [0; x_0]$, in dem die Funktionenschar g_a umkehrbar ist. Geben Sie die Gleichung der Umkehrfunktionenschar $h_a(x) = g_a^{-1}(x)$ an und bestimmen Sie deren Definitionsmenge D_{h_a}. **[6 BE]**
   b) Zeigen Sie, dass alle Funktionen h_a die gleiche Nullstelle besitzen. Bestimmen Sie dann die Menge aller Stammfunktionen der Funktionen h_a (Hinweis: Beginnen Sie mit einer Substitution). **[5 BE]**
   c) Zeigen Sie, dass für eine geeignete Wahl von c gilt:
   $h_a(x) = k_a(x) = c + \frac{1}{a} \cdot \arcsin(1 - x)$ mit $D_{h_a} = D_{k_a}$. Geben Sie den Wert für c an. **[3 BE]**

Arbeitszeit: 55 Minuten **Gesamt: [40 BE]**

M2 Funktionenschar mit Exponentialfunktion

1. Gegeben ist die in $D_a = \mathbb{R}$ definierte Schar von Funktionen f_a durch ihre Gleichung $f_a(x) = \left(1 + \frac{x}{a}\right) \cdot e^{1-\frac{x}{a}}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und Graphen G_a.

   a) Untersuchen Sie die Graphen G_a auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und bestimmen Sie das Verhalten der Scharkurven für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$. **[[illegible] BE]**

   b) Bestimmen Sie Art und Lage des Extrempunktes des Graphen G_a. Geben Sie mögliche Auffälligkeiten an. **[7 BE]**

   c) Zeigen Sie, dass G_a einen Wendepunkt besitzt und geben Sie dessen Koordinaten an. Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente t_a und deren Schnittpunkt S_a mit der x-Achse. **[5 BE]**

   d) Begründen Sie, dass alle Funktionen f_a für x > 0 umkehrbar sind. Bestimmen Sie die Steigung der Umkehrfunktion f_a^{-1} im Punkt [illegible]. **[3 BE]**

   e) Zeichnen Sie für a = 1 den Graphen G_1 sowie die Wendetangente t_1 im Intervall $I = [-1{,}5; 5]$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Verwenden Sie: 1 LE = 2 cm. **[5 BE]**

   f) An den Graphen G_1 sollen vom Punkt [illegible] auf der x-Achse Tangenten gelegt werden. Geben Sie an, welche Steigungen für diese Tangenten möglich sind. **[3 BE]**

2. Stammfunktion und Integralfunktion

   a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F_a(x) = -(x + 2a) \cdot e^{1-\frac{x}{a}}$, $D_{F_a} = D_a$ eine Stammfunktion zur Schar f_a ist. **[3 BE]**

   b) Der Graph G_a, die Wendetangente t_a und die x-Achse schließen eine Fläche ein, die sich ins Unendliche erstreckt. Zeigen Sie durch Berechnung, dass der Flächeninhalt A für jeden Wert von a endlich ist. **[5 BE]**

   c) Die Funktion $G(x) = \int_{-a}^{x} f_a(t)\,dt, D_G = D_a$ ist eine Integralfunktion zu f_a. Geben Sie G in integralfreier Darstellung an. Bestimmen Sie dann $\lim\limits_{x \to \infty} G(x)$ und deuten Sie dieses Ergebnis geometrisch. **[5 BE]**

Arbeitszeit: [illegible] Minuten **Gesamt: [40 BE]**