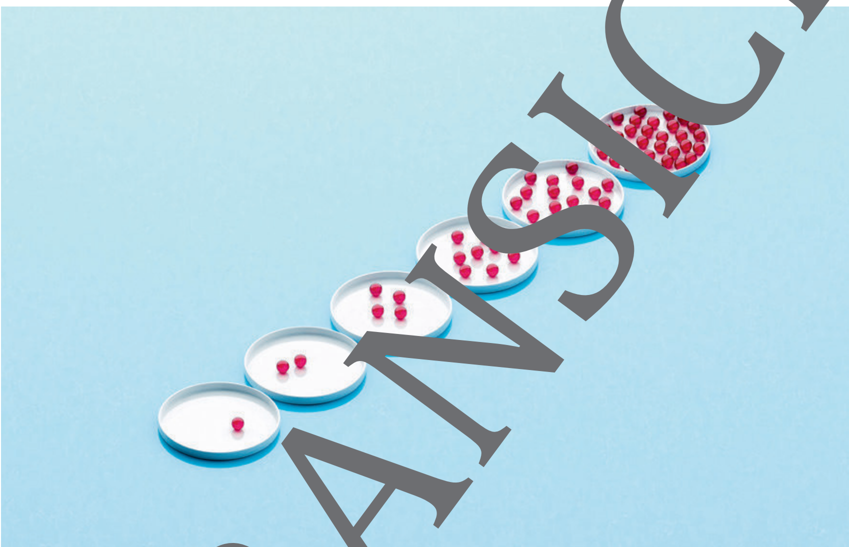
Wachstum, Zerfall und zeitliche Veränderungen – Anwendungen der Exponentialfunktion

Alfred Müller



© Jorg Greuel / Photodisc / Getty Images Plus

Ob das Wachstum von Bakterienkulturen oder der Zerfall von radioaktiven Substanzen, mathematisch lassen sich solche Prozesse häufig mithilfe von Exponentialfunktionen beschreiben.

Nach einer kurzen Einleitung und Wiederholung der wichtigsten Eigenschaften dieser Art von Funktionen lösen Ihre Schülerinnen und Schüler eine Reihe von Textaufgaben, in denen zeitliche Veränderungen mittels Exponentialfunktionen beschrieben werden. Dabei sind nicht nur ihre mathematischen Fähigkeiten gefordert, die Jugendlichen trainieren auch das Verstehen von beschreibenden Texten und das Übersetzen in die Sprache der Mathematik.

RAABE KLASSE SCHULE

Wachstum, Zerfall und zeitliche Veränderungen – Anwendungen der Exponentialfunktion

Oberstufe (weiterführend/vertiefend)

Alfred Müller

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

Beschreibende Texte zu mathematischen Problemen verstehen
Integrieren und Differenzieren von Exponentialfunktionen
Lösen von Gleichungen mit Exponentialtermen
Mathematisches Modellieren von Wachstums- und Zerfallsprozessen

Die Geschichte vom Reiskorn und vom Schachbrett M1

Ein König gewährte einem Mann für seine Dienste als Belohnung einen Wunsch. Der Mann lehnte erst ab, doch der König bestand darauf.

Schließlich wünschte sich der Mann Folgendes: Der König möge ein Schachbrett mit acht mal acht Feldern nehmen und auf das erste Feld ein Reiskorn legen. Auf das zweite Feld sollten zwei Reiskörner, auf das dritte Feld vier, auf das fünfte acht und so weiter. Auf jedes Feld, so der Wunsch, sollten doppelt so viele Reiskörner gelegt werden wie auf das Vorhergehende.

Der König und seine Berater lachten und machten sich daran, die merkwürdige Bitte zu erfüllen. Für das achte Feld brauchten sie 128 Reiskörner, auf dem sechzehnten waren es bereits 32 786. Unter der Annahme, dass ein Reiskorn ca. 30 mg wiegt, wäre das bereits fast 1 kg Reis.

Allmählich verging ihnen das Lachen. Als sie das 32. der insgesamt 64 Felder erreicht hatten, waren dafür bereits mehr als 2 Milliarden Reiskörner nötig, was rund 60 Tonnen Reis entspricht. Und immer noch warteten 32 weitere Felder auf noch mehr Reiskörner.

Bald erkannten sie, dass es auf der ganzen Welt nicht genug Reis geben würde, um diesen Wunsch zu erfüllen. Für das 64. Feld wären schließlich rund 9,2 Trillionen Reiskörner nötig. Zusammengezählt würden schließlich auf allen 64 Feldern insgesamt fast 18,5 Trillionen Reiskörner liegen, die ein Gesamtgewicht von etwa 560 Milliarden Tonnen hätten.

Zum Vergleich: China ist derzeit der weltgrößte Produzent von Reis. Im Jahr 2021 wurden dort etwa 210 Millionen Tonnen Reis produziert (Quelle: Food and Agriculture Organization of the United Nations, www.fao.org).

Mathematisch lässt sich die Entwicklung der Reismenge durch eine Exponentialfunktion beschreiben. Dazu werden die Felder des Schachbretts durchnummeriert. Die Zahl der Reiskörner auf dem n-ten Feld lässt sich dann durch die Funktion $f_{\text{Reiskörner}}(n) = 2^{n-1}$ angeben.

M2 Exponentialfunktion: eine kurze Wiederholung

Exponentialfunktionen werden zur Beschreibung von Wachstums- oder Zerfallsprozessen verwendet, bei denen die Rate des Wachstums oder Zerfalls jeweils von der aktuellen Größe abhängig ist. Bei der Geschichte vom Reiskorn und dem Schachbrett **(M1)** wuchs die Zahl der Reiskörner pro Feld umso schneller, je mehr Körner auf dem vorhergehenden Feld lagen.
Einen Zerfallsvorgang finden wir etwa bei der Halbwertszeit von radioaktiven Substanzen. Dabei halbiert sich die Menge des strahlenden Materials nach Ablauf einer fixen Zeitspanne auf die Hälfte der ursprünglichen Menge. So bleibt z. B. von 1 kg des radioaktiven Kobalt-Isotops ^{60}Cs nach ca. 5,3 Jahren 0,5 kg übrig. Nach weiteren 5,3 Jahren halbiert sich dieser Wert nochmals auf 0,25 kg.

Allgemein sind Exponentialfunktionen Funktionen, bei denen die Variable x als Hochzahl vorkommt: $f(x)=a^x$ mit Basis $a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ und Exponent $x\in\mathbb{R}$.
Das Vorzeichen des Exponenten gibt Aufschluss darüber, ob es sich um einen Wachstums- oder einen Zerfallsprozess handelt.

Wachstum: $f(x)=a^x$

Zerfall: $f(x)=a^{-x}$

Die natürliche Exponentialfunktion

Bei der natürlichen Exponentialfunktion wird die Eulersche Konstante e als Basis verwendet:
$f(x)=e^x$ mit $e=2{,}718\,281\,828\,\ldots$
Diese Variante der Exponentialfunktion hat die Eigenschaft, dass sie mit ihrer eigenen Ableitungsfunktion übereinstimmt:
$f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x \wedge \int f(x)\,dx=e^x+c$

Bildung von Ableitungsfunktionen

Bei beliebigen Exponentialfunktionen ist ggf. die Kettenregel anzuwenden. Dabei ist der Exponent als Funktion g(x) zu verstehen:
$f(x)=e^{g(x)} \Rightarrow f'(x)=e^{g(x)}\cdot g'(x)$

Beispiele:

$f(x)=e^{4x+3} \Rightarrow g(x)=4x+3 \wedge g'(x)=4$
$\Rightarrow f'(x)=e^{4x+3}\cdot 4=4e^{4x+3}$

$f(x)=e^{x^2} \Rightarrow g(x)=x^2 \wedge g'(x)=2x$
$\Rightarrow f'(x)=e^{x^2}\cdot 2x=2x\cdot e^{x^2}$

M3 Übungsaufgaben

1. Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge L der Exponentialgleichung:

   a) $8 \cdot e^{2x} + 10 \cdot e^{x} - 3 = 0$ b) $e^{-\frac{3}{2}x} - 6 \cdot e^{-3x} = 0$

   c) $e^{6x-3} - e^{4x-2} = 0$ d) $2^{x} = 5^{x-1}$

2. Die Funktion f ist in $D_f = \mathbb{R}_0^+$ durch ihre Gleichung $y = f(x) = 4 \cdot \left(e^{-2x} - e^{-0,[illegible]}\right)$ mit Graphen G_f gegeben.
   a) Untersuchen Sie den Graphen G_f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, auf Extremwerte und Wendepunkte sowie auf Asymptoten. Zeichnen Sie dann den Graphen G_f im Intervall $I = [0;8]$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem.
   b) Bestimmen Sie die Menge aller Stammfunktionen F_c zur Funktion f, dann diejenige Funktion F_0, die durch den Ursprung geht.
   c) Die Ordinate des Extremwertes, die x-Achse, die y-Achse sowie der Graph G_f begrenzen eine Fläche A. Bestimmen Sie deren Flächeninhalt.
   d) Die Funktion f modelliere die Entwicklung der Belegzahlen in einem Hotel. Diese werden in ein Koordinatensystem eingetragen. Dabei sei die Einteilung der x-Achse in Jahren, jene der y-Achse in 100 Personen (z. B.: $y = 1 \mathrel{\hat{=}} 100$ Personen). Zu Beginn der Aufschreibung ist das Hotel voll belegt.
      I. Wie viele Personen können maximal untergebracht werden? Welche Bedeutung besitzen der Extremwert und der Wendepunkt der Funktion bezogen auf den Sachzusammenhang?
      II. Bestimmen Sie die durchschnittliche Belegzahl in den ersten vier Jahren.
      III. Welche Kritik kann man an dieser Modellierung der Belegzahlen üben?

3. Gasstrom
   In einem Versuchslabor kann ein Gasvolumen in einem Spezialbehälter so geregelt werden, dass die Stärke des Gasstroms durch das Ventil mithilfe der Funktion f mit
   $f(x) = 8 \cdot e^{-x} - 0,2 \cdot e^{[illegible]}$ mit x in Minuten nach Beobachtungsbeginn und $f(x)$ in $\frac{m^3}{\text{Min.}}$.
   Die Funktionswerte von f geben je nach Vorzeichen eine Gaszufuhr bzw. Gasabnahme an. Zu Beginn einer Beobachtung befinden sich $12\,m^3$ Gas im Behälter.
   a) Die Funktion F beschreibt die Entwicklung des Gasvolumens im Spezialbehälter. Bestimmen Sie eine Gleichung von F und zeichnen Sie die Graphen G_f und G_F in ein Koordinatensystem.
   b) Berechnen Sie den Maximalwert, den das Gasvolumen erreichen kann, sowie die Zeit, zu der der Gasbehälter leer ist.