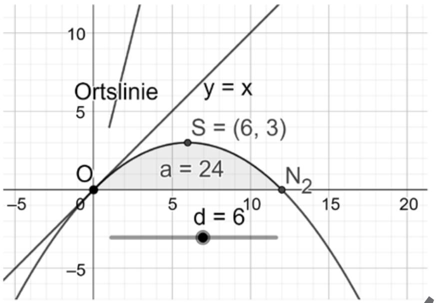
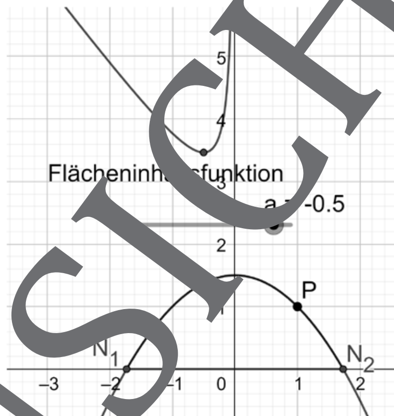
Parabeln und Integralrechnung





Grafik: Günther Weber

Parabeln mit festem Scheitelpunkt kennen die Jugendlichen bereits aus der Mittelstufe. Im Beitrag liegt der Scheitelpunkt jedoch variabel auf einer Parallelen zur x-Achse oder auf einer Geraden im 1. Quadranten und läuft durch einen weiteren festen Punkt. Ihre Schüler und Schülerinnen bestimmen mit weiteren Vorgaben die Parabelgleichung und berechnen die Fläche, die diese Parabel mit der x-Achse einschließt. Liegt der Scheitelpunkt auf einer Geraden, so bestimmen sie den Scheitelpunkt der Parabel mit dem maximalen Flächeninhalt. Abschließend werden die Aufgabenstellungen auf eine beliebige Parallele und eine beliebige Gerade im 1. Quadranten übertragen.

Parabeln und Integralrechnung

Oberstufe (grundlegend)

Ein Beitrag von Günther Weber

Hinweise 1

Aufgaben 3

Lösungen 5

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

das Aufstellen der Gleichung einer Parabel, die durch einen festen Punkt verläuft und deren Scheitelpunkt variabel ist und berechnen den Flächeninhalt der Fläche, die zwischen dieser Parabel und der x-Achse liegt. Diese Rechnungen führen sie zuerst am konkreten Beispiel durch und verallgemeinern sie anschließend. Insgesamt festigen die Lernenden ihr Wissen über Ableitungs- und Integralfunktionen.

Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Ihre Schülerinnen und Schüler kennen die Scheitelpunktform der Parabel und wissen, dass durch den Scheitelpunkt eine Symmetrieachse verläuft. Die Lernenden können die Steigung in einem Punkt eines Graphen bestimmen. Das Aufstellen der Tangentengleichung bzw. der Gleichung der Normale in einem Punkt des Graphen bereitet ihnen keine Schwierigkeiten. Ebenso sind sie in der Lage, einen Extrempunkt zu bestimmen. Im Allgemeinen sind die Jugendlichen sicher im Umgang mit ganzrationalen Funktionen(-scharen) und sind dazu fähig diese sowohl zu differenzieren als auch zu integrieren. Von Vorteil ist es, wenn die Lernenden Übung im Umgang mit einem GTR/CAS-Rechner haben.

Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan
https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOSt_Mathematik.pdf
(aufgerufen am 26.09.2022) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen:
Die Schülerinnen und Schüler …

- verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrempunkten,
- bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen,
- wenden die Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionen an,
- bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen,
- ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen,
- bestimmen Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen, mithilfe von bestimmten Integralen.

Zudem nutzen die Lernenden mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge, um Sachverhalte zu veranschaulichen bzw. Ergebnisse zu kontrollieren.

Methodisch-didaktische Anmerkungen:

Vor der Bearbeitung der Aufgaben wiederholen Sie als Lehrkraft die Gleichung der Winkelhalbierenden und die Scheitelpunktform der Parabel. Ebenso weisen Sie darauf hin, dass die Symmetrieachse der Parabel durch den Scheitelpunkt verläuft und dass das Produkt der Steigungen zweier senkrecht aufeinander stehender Geraden gleich minus Eins ist.

Aufgabe 1) kann differenziert nach Leistungsstärke bearbeitet werden. Leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler bearbeiten die Aufgabenteile a) – c) und e), f), leistungsstärkere die Aufgabenteile d) und g). Im Anschluss an die Bearbeitung kann die allgemeine Lösung mit der beispielhaften Lösung verglichen werden.

Bei Aufgabe 2) bestimmen Sie bei leistungsschwächeren Lerngruppen die Ableitung (Operator „zeigen Sie“) gemeinsam mit der Gruppe. Leistungsschwächere Lernende gehen zum Nachweis der Ableitung der Flächeninhaltsfunktion über und bestimmen mit der vorgegebenen Ableitung das Extremum. Im Aufgabenteil j berechnen leistungsstarke Schülerinnen und Schüler das Volumen des Rotationskörpers per Hand und nicht mit dem CAS.
Eine Veranschaulichung bzw. Kontrolle der Lösung ist mithilfe von GeoGebra möglich.

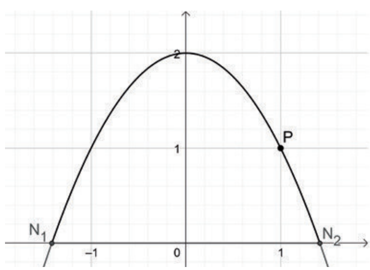
Aufgaben

M1

1. Gegeben ist eine Parabel, die durch den Ursprung verläuft. Der Scheitelpunkt S liegt auf der Parallelen zur x-Achse mit der Gleichung $y = 3, x > 0$.
   a) Bestimmen Sie den Scheitelpunkt der Parabel so, dass die 1. Winkelhalbierende die Tangente an die Parabel im Ursprung ist. Die zur Parabel gehörige Funktion wird mit p_1 bezeichnet.
   b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von der Parabel p_1 und der x-Achse eingeschlossen wird.
   c) Bestimmen Sie für einen beliebigen Scheitelpunkt auf der Parallelen mit der Gleichung $y = 3, x > 0$ die Ortslinie für den Flächeninhalt der Fläche, den die Parabel und die x-Achse einschließen.
   d) Bearbeiten Sie die Aufgabenstellungen der Aufgabenteile a) – c) erneut, wenn der Scheitelpunkt auf der Parallelen zur x-Achse mit der Gleichung $y = k,\ k > 0, x > 0$ liegt.

   Der Scheitelpunkt liegt jetzt auf dem Teil der Geraden mit der Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$, der im 1. Quadranten liegt. Die zur Parabel gehörige Funktion wird mit p_2 bezeichnet, sie verläuft ebenso durch den Ursprung.
   e) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von der Parabel p_2 und der x-Achse eingeschlossen wird.
   f) Berechnen Sie, für welche Parabel der Flächeninhalt der eingeschlossenen Fläche maximal wird. Geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.
   g) Bearbeiten Sie die Aufgabenstellungen der Aufgabenteil e und f erneut, wenn der Scheitelpunkt auf der Geraden mit der Gleichung $y = mx + n,\ m < 0, n > 0$ liegt.

2. Eine nach unten geöffnete Parabel mit der Gleichung $p_a(x) = ax^2 + b, a < 0$ verläuft durch den Punkt $P(1|1)$. Die Parabel schließt mit der x-Achse eine Fläche ein.
   a) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel $p_a(x)$ abhängig von dem Parameter a.
   b) Eine Tangente t_{a1} an die Parabel im Punkt P verläuft parallel zur 2. Winkelhalbierenden. Ermitteln Sie die zugehörige Parabelgleichung und geben Sie die Gleichung der Tangente an.



Grafik: Günther Weber