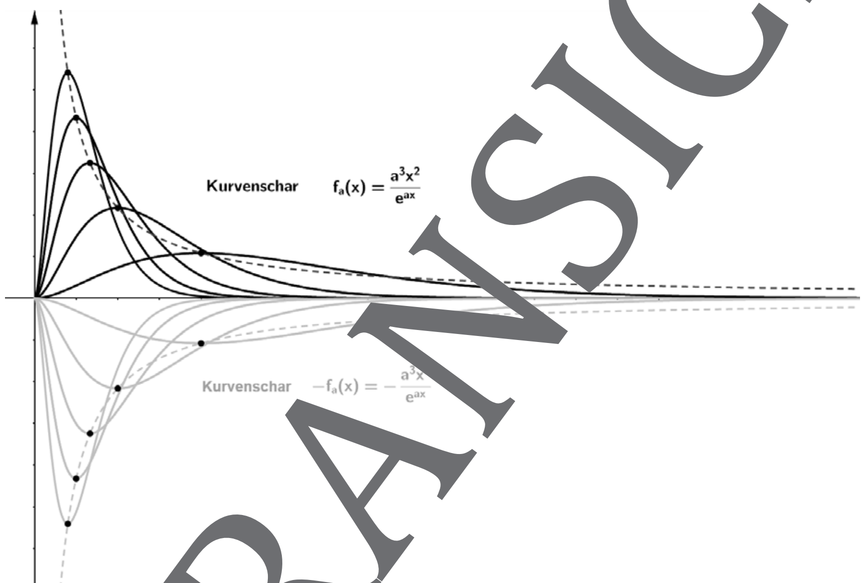
# Kurvenscharen – Eigenschaften von Funktionen und Funktionenscharen

Ein Beitrag von Dr. Jürgen Leitz
Illustrationen von Dr. Jürgen Leitz




*Grafik: Dr. Jürgen Leitz*

In den Naturwissenschaften und in der Technik nimmt die Behandlung von Kurvenscharen eine große Rolle bei der Simulation von Vorgängen und Prozessen ein. Die Kurvenscharen werden im Unterricht der Sekundarstufe II in Klassen mit erhöhtem Niveau ausführlich behandelt und sind auch Gegenstand der Abiturprüfung.
In einem ausführlichen Theorieteil befassen sich die Lernenden mit Themen wie Null- und Extremstellen, Monotonieverhalten und Grenzwerten von Funktionen und Funktionenscharen. In einer Reihe von Übungsaufgaben wenden sie anschließend das Gelernte an.



RAABE, KLASSE SCHULE

# Kurvenscharen – Eigenschaften von Funktionen und Funktionenscharen

Ein Beitrag von Dr. Jürgen Leitz
Illustrationen von Dr. Jürgen Leitz


**Hinweise** 1

**M1 Definitions- und Wertebereich** 3

**M2 Symmetrieverhalten bei ganzrationalen Funktionen** 4

**M3 Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte** 8

**M4 Monotonie und Krümmung** 10

**M5 Beschränktheit von Funktionen** 12

**M6 Grenzwerte von Funktionen** 14

**M7 Ortslinien von Kurvenscharen** 19

**M8 Aufgaben zu allgemeinen Eigenschaften von Funktionen** 24

**M9 Aufgaben zu Kurvenscharen** 26

**Lösungen** 29


## Die Schülerinnen und Schüler lernen:

In einem ausführlichen Theorieteil befassen sich die Lernenden mit Themen wie Null- und Extremstellen, Monotonieverhalten und Grenzwerten von Funktionen und Funktionenscharen. In einer Reihe von Übungsaufgaben wenden sie anschließend das Gelernte an.

## Überblick

*Legende der Abkürzungen:*

**AB** Arbeitsblatt

einfaches Niveau mittleres Niveau schwieriges Niveau

Zusatzaufgaben

| Thema | Material | Methode |
|---|---|---|
| Definitions- und Wertebereich | M1 | AB |
| Symmetrieverhalten bei ganzrationalen Funktionen | M2 | AB |
| Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte | M3 | AB |
| Monotonie und Krümmung | M4 | AB |
| Beschränktheit von Funktionen | M5 | AB |
| Grenzwerte von Funktionen | M6 | AB |
| Ortslinien von Kurvenscharen | M7 | AB |
| Aufgaben zu allgemeinen Eigenschaften von Funktionen | M8 | AB |
| Aufgaben zu Kurvenscharen | M9 | AB |

## Kompetenzprofil:

**Inhalt:** Allgemeine Eigenschaften von Funktionen: Definitions- und Wertebereich, Symmetrieverhalten, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Monotonie und Krümmung, Beschränktheit, Grenzwerte, Kurvenschar, Ortslinien

**Medien:** GTR/CAS, GeoGebra

**Kompetenzen:** Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

# Hinweise

## Vorbemerkungen

Eine Kurvenschar (auch Funktionenschar, Parameterfunktion genannt) ist nichts anderes als eine Menge normaler Funktionen, die neben der unabhängigen Variablen x noch ein oder mehrere Parameter (Formvariablen) enthält. So ist beispielsweise der Kraftstoffverbrauch eines Autos nicht nur von der Geschwindigkeit abhängig, mit der es fährt, sondern auch von anderen Faktoren wie die Straßenlage (Steigung der Fahrbahn und entsprechende Gangschaltung). Eine grafische Darstellung einer Kurvenschar ist jedoch nicht möglich, da man nur immer einen einzelnen Vertreter der Schar zeichnen kann. Die Schar erhält man durch Animation mithilfe grafikfähiger Programme (beispielsweise GeoGebra).

**Beispiel:**

Die allgemeine Scheitelpunktform der quadratischen Funktion lautet $f(x)=(x-d)^2+e$ mit der Variablen x und den Parametern d und e.

Hier kann man sehr schnell die Koordinaten des Scheitelpunktes angeben: $S(d|e)$. Für $d=0$ liegt der Scheitelpunkt auf der $y-$Achse $(0|e)$ und als Definitionsbereich für die Formvariable e wird z. B. die Menge der ganzen Zahlen betrachtet (hier $e\in\mathbb{Z}$).

Die damit definierte Funktionenschar $f_e(x)=x^2+e$ besteht damit aus Parabeln, die entlang der $y-$Achse (hier: jeweils um zwei Einheiten) gegeneinander verschoben sind.

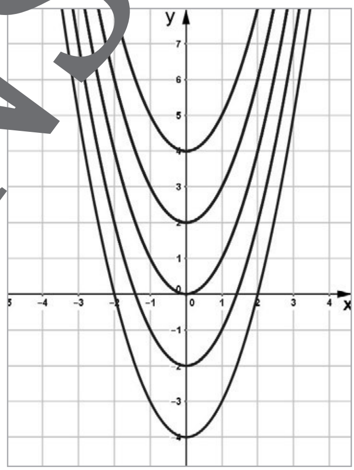



*Abb. 1: Funktionenschar*

*© Dr. Jürgen Leitz*

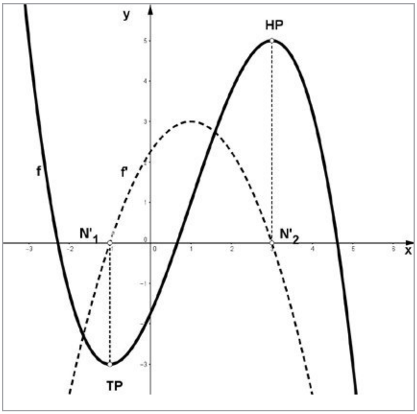



*Abb. 7 Extrempunkte*

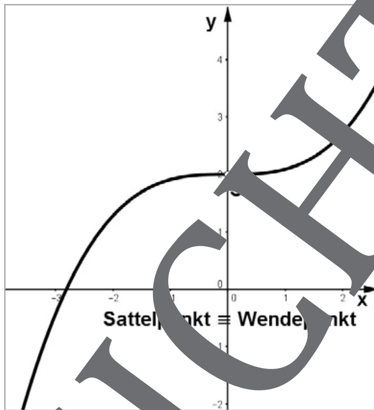



*Abb. 8 Sattelpunkt*

**Wendestellen** einer Funktion können Wendepunkte (Anstieg der Wendetangente ungleich null) und Sattelpunkte (Anstieg der Wendetangente ist null) sein.

Eine **notwendige Bedingung** ist, dass die zweite Ableitung null ist: $f''(x) = 0$.
Wir erhalten mit dieser Bedingung potenzielle Wendestellen $x_W$.
Die **hinreichende Bedingung** lautet: $f'''(x_W) \neq 0$.
Dann ist für
$\mathbf{f'''(x_W) < 0}$ an der Stelle $x_W$ eine **Links-rechts-Wendestelle** und für
$\mathbf{f'''(x_W) > 0}$ an der Stelle $x_W$ eine **Rechts-links-Wendestelle** vorhanden.

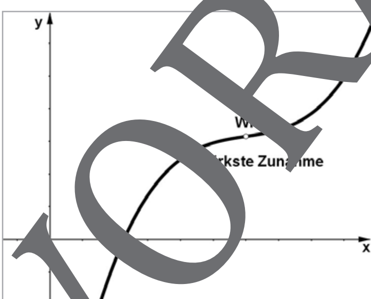



*Abb. 9 R-L-Wendepunkt*

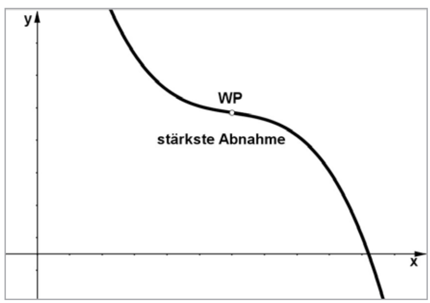



*Abb. 10 L-R-Wendepunkt*

*Grafiken: © Dr. Jürgen Leitz*