Optimierung des Flächeninhalts – Der zerbrochene Spiegel

Wolfgang Lübbe
Illustrationen von Wolfgang Lübbe

Extremwertprobleme, also die Bestimmung lokaler Minima oder Maxima, sind ein wesentlicher Baustein bei der Behandlung der Differentialrechnung, vor allem im Rahmen der innermathematischen Problematik „Kurvendiskussion“.
Wichtiger und reizvoller ist für Schülerinnen und Schüler aber die Anwendung dieser Kenntnisse und Fertigkeiten auf Alltagsprobleme. Selbstgesteuerte Lernformen wie z. B. Probieren, Vermuten, Vergleichen und Präsentieren sind besonders motivierend für die Lernenden. Ergebnisse selbst zu ermitteln und anschließend durch Verallgemeinerung zu bestätigen, ist didaktisch sinnvoll für den Wissenserwerb und die Verinnerlichung der erworbenen Kenntnisse.

Der zerbrochene Spiegel

Oberstufe (grundlegend)

Wolfgang Lübbe

Hinweise 1

M 1 Theorie 2

M 2 Aufgaben 5

Lösungen 6

Anhang 45

Die Schüler lernen:

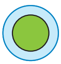
Durch die Bearbeitung realer, praxisnaher Aufgabenstellungen wird den Schülerinnen und Schülern bewusst, dass mathematisches Wissen und Können keinem Selbstzweck dienen. Sie erfahren, dass sie im Alltag auftretende Probleme durch mathematisches Modellieren zielgerichtet und erfolgreich bearbeiten, und dabei auch verschiedene Lösungswege nutzen können.
Die Lernenden erkennen, dass mathematisch-konstruktive Darstellungen das Finden eines Lösungsansatzes erleichtern und beim Abarbeiten des Lösungsweges helfen. Die Schülerinnen und Schüler üben und vervollkommnen ihre Fähigkeit, mathematisch zu kommunizieren und entsprechend zu argumentieren.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab Arbeitsblatt **TA** Tafelbild

Thema	Material	Methode
Der zerbrochene Spiegel - Theorie	M1	Ab, TA
Aufgaben	M2	Ab

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Einzelarbeit.	
	Dieses Symbol markiert Gruppenarbeit.	
	Dieses Symbol markiert Tipps.	

Kompetenzprofil:

Inhalt: Konstruktionen, Maßstab, Geradengleichung, Wertetabelle, Flächenberechnung (Rechteck, Trapez, Dreieck), Extrema (Maximum, Minimum), Strahlensatz, Arbeit mit Variablen, quadratische Funktion, Scheitelpunkt

Medien: TA

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)

Hinweise

Niveau

Aufgabe 1 hat bei Bearbeitung konkreten Zahlenmaterials mittleres, die Verallgemeinerung eher schwieriges Niveau. Aufgabe 2 wird überwiegend auf schwierigem Niveau eingestuft.

Einsatz im Unterricht

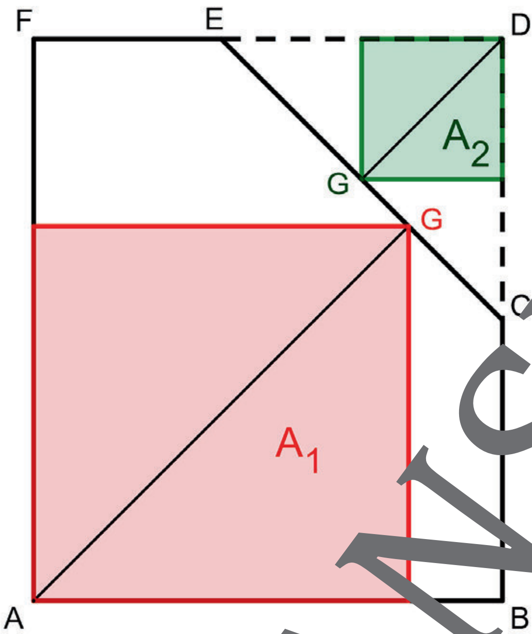
Ausgehend von der „Glaserkonstruktion“ werden für eine bestimmte Spiegelgröße Überlegungen zu unterschiedlich großen Abbruchstücken angestellt (Fälle 1.1–1.4). Diese Aufgaben können in Einzelarbeit der Schülerinnen und Schüler konstruktiv maßstabsgerecht gelöst und Vermutungen formuliert werden. Für die dazugehörigen rechnerischen Schritte (einschließlich Bestätigung der Vermutung) ist ebenfalls Einzelarbeit möglich, aber auch Partnerarbeit denkbar (Spiegelflächen A1 und A2 im Wechsel der Partner). Danach ist eine erste Zusammenfassung als Unterrichtsgespräch sinnvoll.

Für die Verallgemeinerung ist nach einer kurzen Erläuterung des Problems (mit Skizze) eine Teilung des Klassenverbands in zwei Gruppen zur Bearbeitung der Spiegelflächen A1 und A2 empfehlenswert. Leistungsstärkere und leistungsschwächere Jugendliche sollten hierbei ein Team bilden. Eine im Klassenverband geführte mathematische Diskussion zu den insgesamt ermittelten Ergebnissen und Zusammenhängen mit entsprechender Zusammenfassung bildet einen sinnvollen Abschluss der ersten Aufgabe.

Die Änderung der Aufgabenstellung vom Maximum- zum Minimumproblem (Aufgabe 2 – in diesem Beitrag dargestellt am Beispiel des Falles 1.1) einschließlich der Verallgemeinerung wäre für einen Mathematikkurs mit erhöhtem Leistungsniveau eine anspruchsvolle Hausaufgabe. Diese Veränderung der Aufgabenstellung ist analog auch auf die Beispiele der Fälle 1.2–1.4 übertragbar. Für den Einsatz dieser Aufgabe 2 im Unterricht sollte eine Teilung der Klasse in zwei Gruppen (Restfläche $\overline{A_1}$, Restfläche $\overline{A_2}$) erfolgen.

Die Gestaltung des Unterrichtsprozesses in Form der parallelen Arbeit, die anschließende Präsentation und Diskussion der Ergebnisse und schließlich die Festigung der neuen Erkenntnisse soll die Lernenden aktiv in die Unterrichtsführung einbinden.

Glaserkonstruktion



Grafik: Wolfgang Lübbe

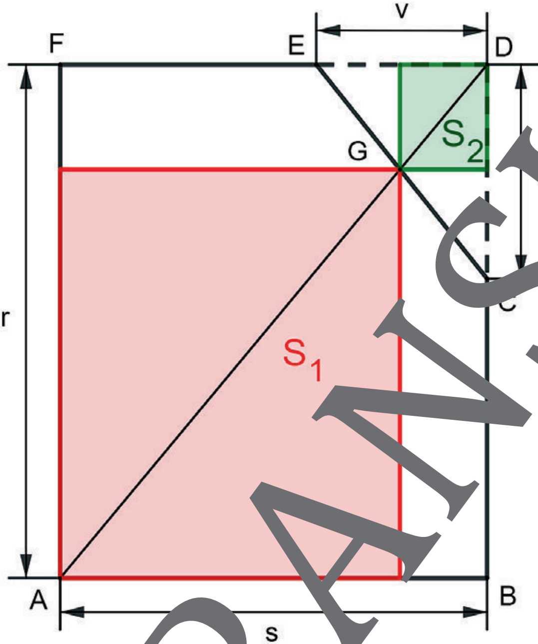
Der Punkt G kann entlang der Strecke $\overline{CE}$ verschoben werden. Dadurch entstehen unterschiedliche Spiegelgrößen.

Konstruktiv kann die Lage des Punktes G für die maximalen Spiegelflächen durch die „Glaserkonstruktion" gefunden werden.

Damit der Spiegel im Trapez ABCEF den maximalen Flächeninhalt A_1 hat, muss der Punkt G folgendermaßen konstruiert werden:

Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CE}$ wird mit dem Punkt D verbunden. Parallel zu dieser Geraden wird eine Gerade durch den Punkt A konstruiert. Der Schnittpunkt dieser Geraden und der Strecke $\overline{CE}$ ist der gesuchte Punkt G.

Der Spiegel S_2 im abgebrochenen rechtwinkligen Dreieck CDE hat den maximalen Flächeninhalt A_2 genau dann, wenn der Punkt G Mittelpunkt der Strecke $\overline{CE}$ ist.
Der Eckpunkt G kann für beide Spiegel identisch, kann aber auch für beide Spiegel verschieden sein.



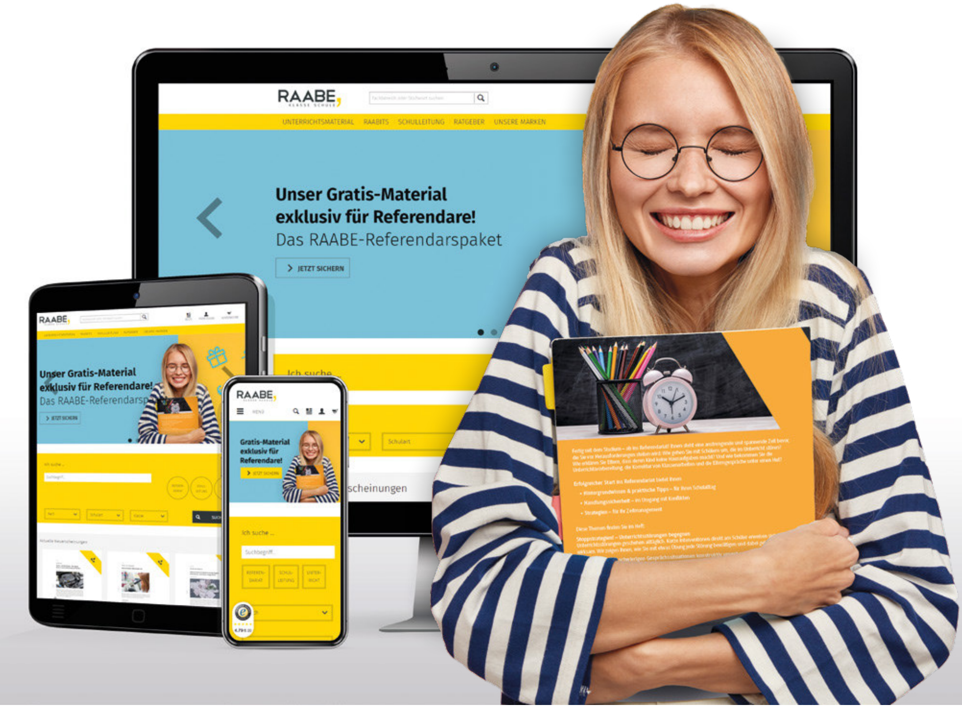
Grafik: Wolfgang Lübbe

Im Anhang ab Seite [illegible]5 wird die Glaserkonstruktion ausführlich mittels Formeln hergeleitet.

Sie wollen mehr für Ihr Fach?

Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download

im RAABE Webshop.



- **Über 4.000 Unterrichtseinheiten** sofort zum Download verfügbar
- **Sichere Zahlung** per Rechnung, PayPal & Kreditkarte
- **Exklusive Vorteile für Grundwerks-Abonnent*innen**
  - 20 % Rabatt auf Unterrichtsmaterial für Ihr bereits abonniertes Fach
  - 10 % Rabatt auf weitere Grundwerke

Jetzt entdecken:

www.raabe.de