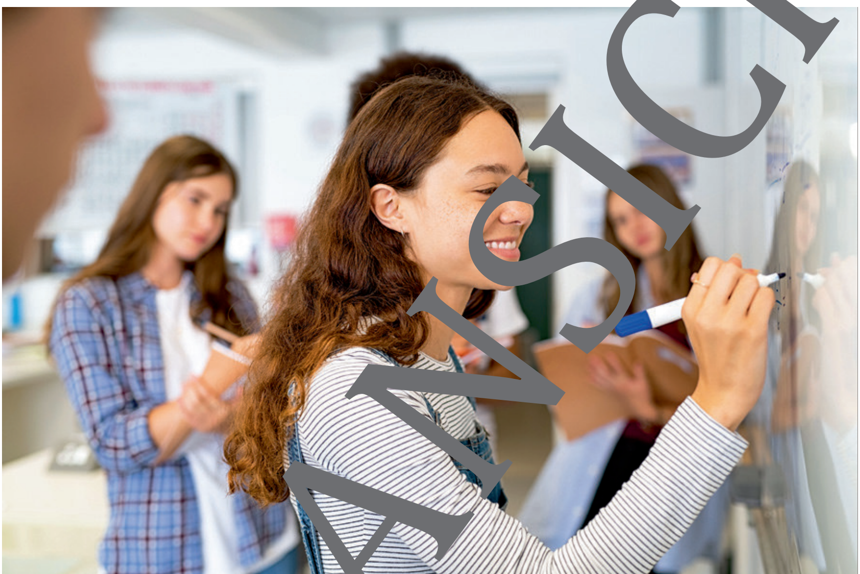
Algebraische Funktionen

Alfred Müller, Coburg
Illustrationen von Alfred Müller



© Ridofranz/iStock/Getty Images Plus

Wie sieht eigentlich die Gleichung einer Ellipse oder einer „liegenden" Parabel aus? In diesem Beitrag erfahren die Jugendlichen, dass Zuordnungen und Funktionen auch über algebraische Gleichungen definiert werden können. Das ermöglicht viele neue Möglichkeiten und Herangehensweisen auch in der Differenzialrechnung.
Fordern Sie Ihre Lerngruppe mit den vielfältigen Aufgaben von weiterführendem Niveau heraus und fördern sie so gezielt leistungsstarke Schülerinnen und Schüler.

Algebraische Funktionen

Oberstufe (weiterführend)

Alfred Müller, Coburg
Illustrationen von Alfred Müller

Die Schüler lernen:

Potenz- und Wurzelfunktionen zu diskutieren. Sie erfahren, dass Zuordnungen und Funktionen auch durch algebraische Gleichungen definiert werden können, lernen das implizite Differenzieren kennen und spalten nach Möglichkeit die Gleichungen in Funktionen auf.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Potenzfunktion mit reellen Exponenten	M1	Ab
Durch algebraische Gleichungen definierte Funktionen	M2	Ab
Implizite Differentiation	M3	Ab
Durch quadratische Gleichungen definierte Funktionen	M4	Ab
Beispiele zu Funktionen mit beliebigen algebraischen Gleichungen	M5	Ab

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Kompetenzprofil:

Inhalt: Potenz- und Wurzelfunktionen, implizite Differentiation, durch algebraische Gleichungen definierte Funktionen, Ellipsen und Hyperbeln
Medien: GTR/CAS, GeoGebra
Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

M 1 Potenzfunktion mit reellen Exponenten

Definitionen und Eigenschaften

Bisherige Betrachtungen:

$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$: Potenzfunktion

Es gilt: $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$: Ableitungsfunktion

Die Funktion f ist bei Einschränkung auf $\mathbb{D}_f^* = \mathbb{R}_0^+$ umkehrbar:

$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$: Wurzelfunktion

Neue Betrachtungen:

$f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ ist eine Potenzfunktion mit einem Stammbruchexponenten.

Eine Verkettung mit der Funktion $y = x^m$ liefert:

$f(x) = x^{\frac{m}{n}}, \quad \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+,$

d. h., man kann dadurch eine Potenzfunktion mit rationalen Exponenten definieren:

$$y = f_q(x) = x^q, \quad q \in \mathbb{Q}, \quad \mathbb{D}_{f_q} = \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ & \text{für } q > 0 \\ \mathbb{R}^+ & \text{für } q < 0 \end{cases}.$$

Da man alle reellen Exponenten durch Intervallschachtelungen annähern kann, kommt man schließlich zur allgemeinen Potenzfunktion:

$f(x) = x^r, \quad r \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+.$

Mit den Kenntnissen von früher gilt:

$y = f(x) = x^r = e^{\ln x^r} = e^{r \cdot \ln x}.$

Daraus ergibt sich die Ableitung der allgemeinen Potenzfunktion:

$$f'(x) = \left(x^r\right)' = e^{r \cdot \ln x} \cdot \frac{r}{x} = r \cdot e^{r \cdot \ln x} \cdot e^{-\ln x} = r \cdot e^{(r-1) \cdot \ln x} = r \cdot e^{\ln x^{r-1}} = r \cdot x^{r-1}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$$

In dieser Regel ist auch die folgende Integralformel enthalten:

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c \wedge r \neq -1 .$$

M 2 Durch algebraische Gleichungen definierte Funktionen

Definition

Die Elemente der Potenzgleichung

$y = x^{\frac{m}{n}}, \quad x \in \mathbb{R}_0^+, \quad m,n \in \mathbb{N}$

erfüllen die allgemeine Gleichung $x^m - y^n = 0$.

f ist folglich eine Teilmenge der Erfüllungsmenge der algebraischen Gleichung

$x^m - y^n = 0$.

Eine Reihe solcher algebraischen Gleichungen kann nach y aufgelöst werden, sodass Funktionen entstehen.

Es gibt aber auch algebraische Gleichungen, die nicht nach y aufgelöst werden können.

Beispiele (M 2)

1. $3x + 6y - 12 = 0$

   ist eine Funktion, da die Gleichung eindeutig nach y aufgelöst werden kann:

   $y = f(x) = -\frac{1}{2}x + 2\,.$

2. $(3x^2 + 4)y - 2x = 0$

   ist eine Funktion, da die Gleichung eindeutig nach y aufgelöst werden kann:

   $y = f(x) = \frac{2x}{3x^2 + 4}$

3. $x^2 - y^2 = 0$

   zerfällt in zwei Funktionen:

   $f_1(x) = x$

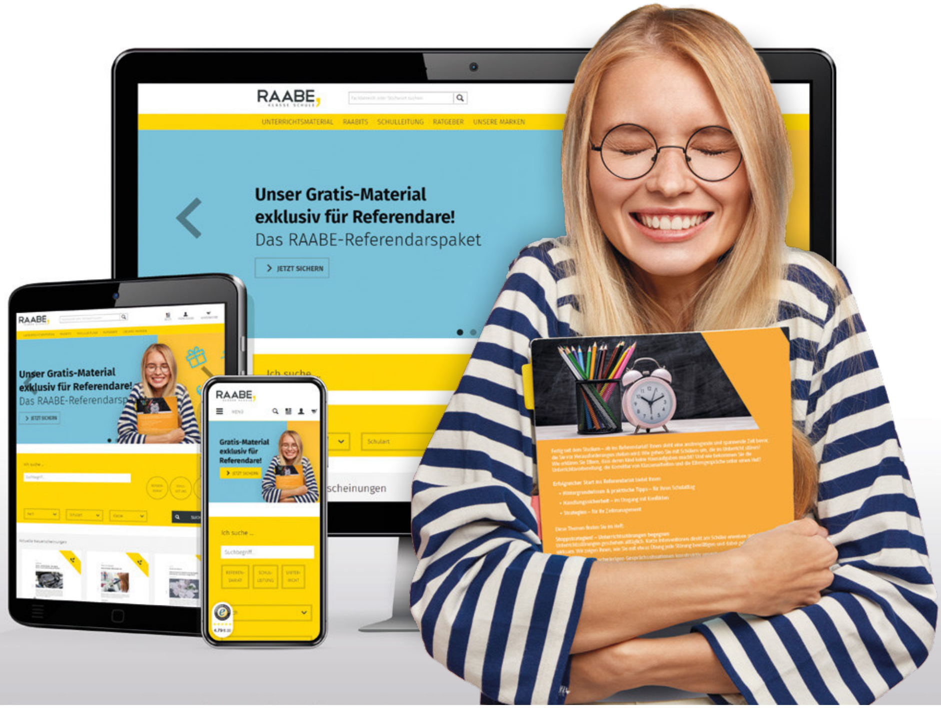
   $f_2(x) = -x$

   oder $f(x) = |x|$

RAABE, KLASSE SCHULE

Sie wollen mehr für Ihr Fach?

Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download **im RAABE Webshop.**



- **Über 4.000 Unterrichtseinheiten** sofort zum Download verfügbar
- **Sichere Zahlung** per Rechnung, PayPal & Kreditkarte
- **Exklusive Vorteile für Grundwerks-Abonnent*innen**
  - 20 % Rabatt auf Unterrichtsmaterial für Ihr bereits abonniertes Fach
  - 10 % Rabatt auf weitere Grundwerke

Jetzt entdecken:

www.raabe.de