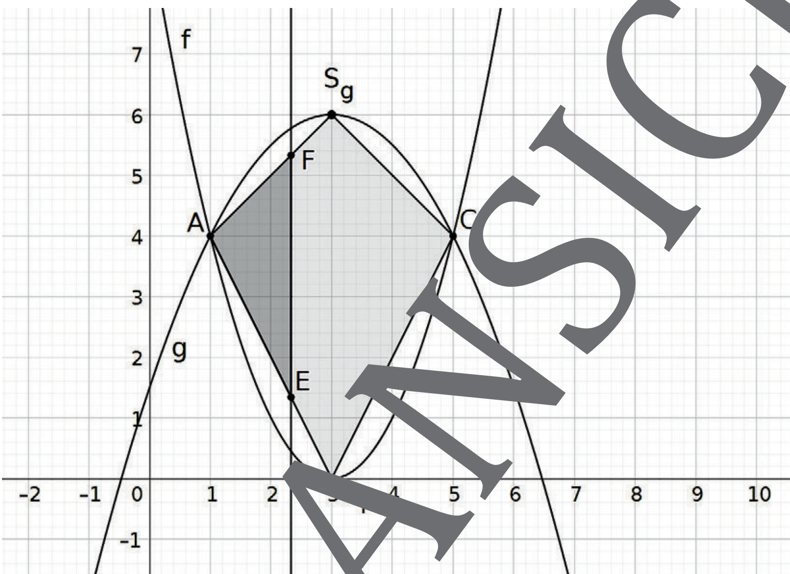
Teilungsverhältnis von Flächen und Körpern

Günther Weber, Brilon
Illustrationen von Günther Weber



Grafik Günther Weber

Teilungsverhältniss… von S… …nd Flächen kennen die Schülerinnen und Schüler schon aus der Unter- u… Mittelstufe (z. B.: die Seitenhalbierenden im Dreieck teilen sich im Verhält… …1; die Diag…len in der Raute halbieren die Fläche). Im Beitrag untersuchen …e zwei sich …hneidende Parabeln, die von den Parabeln eingeschlossenen Viereckfläch…n, in welchem Verhältnis die Flächeninhalte dieser Flächen stehen und ob eine Ro…tion …ser Flächen um die x-Achse Auswirkungen auf das Teilungsverhältnis hat. Zude… werde… die Fl…chen durch eine Gerade unterteilt, sodass eine Extremalaufgabe bzw. ei…e Parameteraufgabe entsteht. Der Beitrag widmet sich somit der Wiederholung …nd Vert…fung verschiedener Verfahren der Flächen- und Volumenberechnung mittels Integ… …der bekannter Formeln.

Teilungsverhältnis von Flächen und Körpern

Oberstufe (grundlegendes Niveau)

Günther Weber, Brilon
Illustrationen von Günther Weber

Die Schüler lernen:

Flächeninhalte von Vierecken und Flächeninhalte von Flächen, die von den Graphen zweier Funktionen eingeschlossen sind, zu bestimmen und die Flächeninhalte ins Verhältnis zu setzen. Sie untersuchen auch, ob sich das Teilungsverhältnis ändert, wenn die beiden Flächen um die x-Achse rotieren. Ebenso unterteilen sie die von den Graphen zweier Funktionen eingeschlossene Fläche in zwei Teilflächen, sodass eine Teilfläche maximal bzw. die Fläche halbiert wird. Zur Bearbeitung der Aufgabenstellungen benutzen und vertiefen die Schülerinnen und Schüler hierbei ihre Kenntnisse aus dem Bereich der Differenzial- und Integralrechnung.

Die Schülerinnen und Schüler …

- ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen,
- bestimmen Flächeninhalte und Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen, mithilfe von bestimmten (und uneigentlichen) Integralen,
- führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese,
- bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“).

Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Die Lernenden sollten Formeln zur Flächenberechnung (Dreieck, Raute) und zur Volumenberechnung (Kegel, Kegelstumpf) kennen. Ebenso sollten sie wissen, wie sich Spiegelung, Verschiebung und Streckung/Stauchung des Graphen einer Funktion auf den Funktionsterm auswirken. Den Lernenden ist bekannt, wie sie die Integralrechnung zur Flächenberechnung der Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen und bei der Volumenberechnung von Rotationskörpern anwenden. Sie können bei einer Extremwertaufgabe die Extremalbedingung aufstellen und die Differenzialrechnung zur Lösung von Extremwertaufgaben nutzen. Das Aufstellen und Lösen von Parameteraufgaben ist bekannt.

Lehrplanbezug:

Verschiebung und Spiegelung sind den Jugendlichen schon aus der Unterstufe, Flächen- und Körperberechnungen aus der Mittelstufe bekannt. In der Oberstufe lernen sie, welche Auswirkungen die Abbildungen auf den Funktionsterm haben. Weitere Kompetenzerwartungen an die Schülerinnen und Schüler sind unter anderem[1]:

Einsatz im Unterricht:

Liegt die Entwicklung von Funktionen längere Zeit zurück, so sollten Sie diese vor der Bearbeitung von Aufgabe 1 im Unterrichtsgespräch wiederholen. Insbesondere wiederholen Sie Folgendes:

- Bei der Spiegelung des Graphen an der x-Achse wird der Funktionsterm der Funktion f mit (–1) multipliziert.
- Der Graph der Funktion f wird in y-Richtung gestreckt oder gestaucht, indem der Funktionsterm der Funktion f mit $a \neq 0$ multipliziert wird.
- Der Graph der Funktion f wird um d Einheiten in Richtung der y-Achse verschoben, indem d zum Funktionsterm addiert wird.

[1] https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_SII/m/GOSt_Mathematik_Endfassung.pdf (aufgerufen am 16.03.2021)

M 1 Aufgaben

Gegeben ist die Funktion $p_1(x) = (x-3)^2$.

1. Der Graph einer Parabel p_2 entsteht, indem die Parabel p_1 an der x-Achse gespiegelt, anschließend mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ gestaucht und dann um 6 Einheiten nach oben verschoben wird. Bestimmen Sie die Funktion p_2.

2. Gegeben sind die Funktion $f(x) = p_1(x) = (x-3)^2$ sowie die Funktion $g(x) = -\frac{1}{2}\cdot(x-3)^2 + 6$.
   a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte A und C, $x_A < x_C$ der beiden Funktionen.
   b) Die Graphen der beiden Funktionen f und g schließen eine Fläche ein. Die Scheitelpunkte S_f und S_g der beiden Funktionen (Parabeln) bilden zusammen mit den Punkten A und C ein Viereck, das in der durch die Graphen der beiden Funktionen eingeschlossenen Fläche liegt.
   Bestimmen Sie den prozentualen Anteil des Flächeninhalts des Vierecks am Flächeninhalt der durch die Graphen eingeschlossenen Fläche.
   c) Die Viereckfläche und die von den beiden Graphen eingeschlossene Fläche rotieren um die x-Achse.
   Bestimmen Sie das Volumenverhältnis der beiden Rotationskörper zueinander.

3. Eine Parallele zur y-Achse mit der Gleichung $x = k, 1 \le k \le 5$ schneidet den Graphen der Funktion f im Punkt B und den Graphen der Funktion g im Punkt D.
   a) Bestimmen Sie k so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks BCD maximal wird. Geben Sie dann den maximalen Flächeninhalt an.
   b) Die Gerade $x = k$, die den Flächeninhalt des Dreiecks BCD maximal werden lässt, unterteilt das Viereck AS_fCS_g in zwei Teilflächen.
   Bestimmen Sie das Flächenverhältnis der beiden Teilflächen zueinander.

4. Die Ursprungsgerade $h(x) = m \cdot x$ unterteilt die von den Graphen f und g eingeschlossene Fläche in 2 Teile.
   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich für m.
   b) Bestimmen Sie m so, dass die durch die Graphen der Funktionen f und g eingeschlossene Fläche durch die Gerade halbiert wird.