Fläche, Volumen, Kepler'sche Fassregel

Peter Bunzel, Rottweil
Illustrationen von Peter Bunzel

Bildquelle: Gutenberg-Universität Mainz, AK Mathematikgeschichte und Unterricht,
https://a[...]mg-u.uni-ma[...]de/

Warum heißt eine Regel zur näherungsweisen Berechnung von Flächen „Fassregel"? Und wer hat sie zuerst verwendet? Torricelli, Simpson, Newton oder Kepler? In diesem Lesebuchbeitrag, ergänzt mit Aufgaben, gehen Ihre Schüler auf Spurensuche und beschäftigen sich mit der Herleitung und der Anwendung der Regel.

Fläche, Volumen, Kepler'sche Fassregel

Peter Bunzel, Rottweil
Illustrationen von Peter Bunzel

Die Schüler lernen:

Integrale näherungsweise mithilfe der „Kepler'schen Fassregel" zu berechnen. Sie überprüfen die Genauigkeit dieser Regel anhand von Beispielen. Außerdem erhalten sie Informationen aus der Geschichte der Flächen- und Volumenberechnung und beschäftigen sich mit verschiedenen Ansätzen bei der Herleitung der „Kepler'schen Fassregel".

Hinweise zur Kepler’schen Fassregel

Die Kepler’sche Fassregel bzw. das Verfahren von Simpson sind beispielsweise in den Bildungsplänen von Sachsen, Hessen oder Schleswig-Holstein verankert. Genauer heißt es im Bildungsplan von Sachsen (Wahlbereich 5: Numerische Integrationsverfahren):

> „Einblick gewinnen in die Geschichte der Integralrechnung
>
> Kennen von numerischen Integrationsverfahren
>
> – Kepler’sche Fassregel
> – Formel von Simpson
>
> Einblicke gewinnen … anhand ausgewählter Beispiele“

Lernvoraussetzungen:

Integralrechnung bis zum Flächeninhalt, für Aufgabe 7 bis zu Rotationskörpern.

Ablauf:

Verwenden Sie diesen Text als Lesebuchbeitrag für einzelne Schüler oder als Grundlage für Referate. Auch ein Einsatz im Unterricht ist gewinnbringend.

Die Materialien sollen in Kleingruppen bearbeitet werden. In diesem Fall ist es sinnvoll, **M 1** im Plenum zu besprechen. Danach erfolgt die Arbeit in den Gruppen. Möglich ist dabei z. B.:

Gruppe	1	2	3	4
Material	M 2	M 3 bis M 5	M 6 – Aufg. 3	M 6 – Aufg. 4

Gruppe	5	6	7
Material	M 6 – Aufg. 5 u. Aufg. 6	M 6, Rest	M 7

Am Schluss stellen die Lernenden ihre Ergebnisse im Plenum vor.

M 1 Näherungsweise Berechnung von Integralen

Es gibt Funktionen, bei denen eine Stammfunktion nur schwer zu bestimmen ist. Bei manchen gibt es gar keine elementare Stammfunktion. Soll nun für eine solche Funktion eine Fläche zwischen dem Schaubild der Kurve und der x-Achse berechnet werden, kann man heutzutage einen GTR oder ein CAS verwenden, um einen sehr genauen Näherungswert für diese Fläche zu erhalten.

Kann man diese nicht verwenden, hat man die Möglichkeit, mit der **Kepler'schen Fassregel** einen Näherungswert zu berechnen, der in vielen Fällen sehr gut ist.

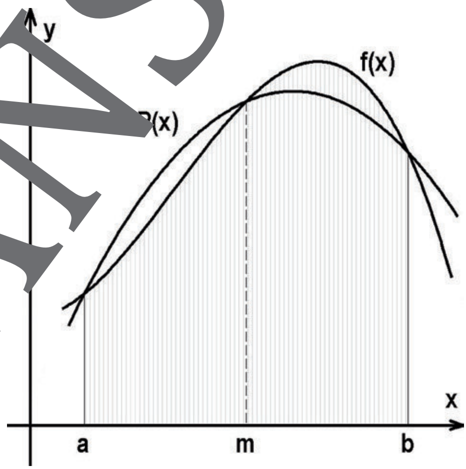
Kepler'sche Fassregel (für Flächen):

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4f(m) + f(b)\right)$$

Herleitung der Formel:[1]

„(…) eine Näherung zum Integral einer Funktion im Intervall wird berechnet, indem man die schwer zu integrierende Funktion f(x) durch eine exakt integrierbare Parabel P(x) annähert (…)“[2].

Falls nötig, kann man diesen Näherungswert verbessern, indem man die zu berechnende Fläche in eine gerade Anzahl (2N) von Teilflächen zerlegt. Man erhält dann die **Simpsonregel**.

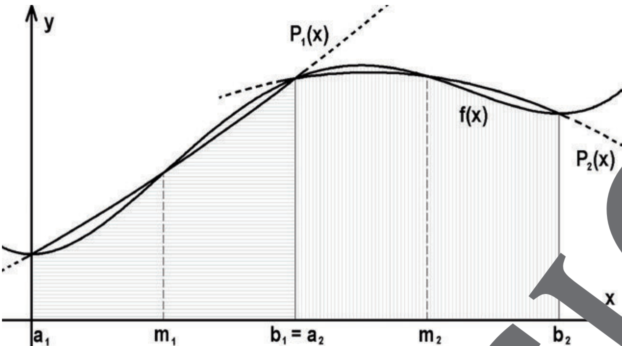


Grafik: Peter Bunzel, vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Simpsonregel (zuletzt aufgerufen am 1.02.2021)

1 Quelle: Wikipedia, https://de.wikipedia.org/wiki/Simpsonregel (zuletzt aufgerufen am 1.02.2021), CC-BY-SA-3.0

2 Gemeint ist hier: … eine …Parabel vom Grad 2
Nach dem Ansatz wird die Fassregel ohne weitere Rechnung oder Begründung direkt angegeben.

In der Abbildung wird die Simpsonregel am Beispiel N = 2 veranschaulicht (es gibt dann vier Teilflächen).



Grafik: Peter Bunzel, vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Simpsonregel (zuletzt aufgerufen am 1.02.2021)

Zur **Geschichte der Simpsonregel**[3]:

> „Die Formel wurde erstmals von dem 1608 geborenen Evangelista Torricelli benutzt, ist aber nach dem 1710 geborenen englischen Mathematiker Thomas Simpson benannt. Sie entspricht der **Kepler'schen Fassregel**, die Johannes Kepler bereits 1615 aufstellte."

Kepler hat 1613 anlässlich seiner zweiten Hochzeit einige Fässer Wein gekauft und sich über die damals übliche Methode zur Bestimmung des Fassvolumens mithilfe von „Visier-Ruten" gewundert.

> „Kepler verfasste daraufhin die Schrift *Nova Stereometria doliorum vinariorum* 1615 (Neue Inhaltsberechnung von Weinfässern), in der er nach überprüfbaren Methoden zur Inhaltsberechnung von Weinfässern suchte. Eine dieser Methoden bestand darin, die Krümmung des Fasses durch eine Parabel anzunähern, da Inhaltsberechnungen mithilfe von Parabeln seit Archimedes exakt durchgeführt werden konnten.
>
> Unter anderem beschrieb er darin eine Formel zur Berechnung der Kapazität (genauer des Volumens) von Weinfässern mit unregelmäßigen Formen. Diese Formel liefert exakte Werte für den Kreiszylinder, Kegelstumpf (einschließlich Kegel), Kugel, Rotationsellipsoid, elliptisches Paraboloid und einschaliges Hyperboloid."

[3] Quelle: Wikipedia, https://de.wikipedia.org/wiki/Simpsonregel#Geschichte (zuletzt aufgerufen am 1.02.2021). CC-BY-SA-3.0

Schließlich wird der Name plausibel gemacht:

„Der Name Fassregel lässt sich durch die folgende Anwendung begründen: Zur Berechnung des Volumens eines Weinfasses sei q(x) die Querschnittsfläche quer zur Längsachse in der Entfernung x vom Boden des Fasses; sie lässt sich durch Bestimmung des Umfanges leicht ausrechnen.

Ist h die Höhe des Fasses, so ist das Volumen gleich $V = \int_0^h q(x)\,dx$

Die **Kepler‘sche Fassregel** (für Rauminhalte) gibt nun

$$V \approx \frac{h}{6} \cdot \left(q(0) + 4 \cdot q\left(\frac{h}{2}\right) + q(h) \right)$$ “

Fragen:

Betrachtet man die bisher aufgeführten Informationen, so stellen sich einige Fragen:

1. Wozu wird eine Parabel (vom Grad 2) benötigt?

2. Andere ganzrationale Funktionen wären doch auch exakt integrierbar!

3. Hat Kepler die Fassregel für die Berechnung von **Flächen oder Rauminhalten** verwendet? Hat er sie überhaupt verwendet?

4. Und falls er sie verwendet hat: Hat er sie auf Körper mit „unregelmäßigen“ Formen angewendet?

5. Wenn Torricelli die Regel vor Kepler aufgestellt hätte, wäre er jünger als 7 Jahre gewesen. **Wer war also der Erste?**
Kann eine Stelle angegeben werden, an der die Formel auftaucht?

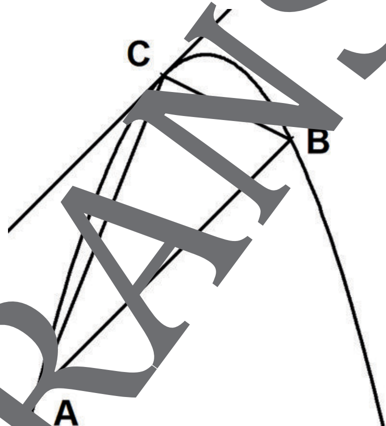
6. **Woher kommt der Faktor 4**?

M 2 Wozu wird eine Parabel (vom Grad 2) benötigt?

Zu Zeiten Keplers gab es noch keine Integrale. Auch waren Flächen nicht durch Funktionen im heutigen Sinne festgelegt, sondern durch geometrische Beschreibungen. Dank eines Satzes von Archimedes war es jedoch möglich, solche Flächen näherungsweise mit Parabeln des Grades 2 zu berechnen.

In seiner Schrift „Die Quadratur der Parabel" beweist Archimedes den folgenden Satz[4]: Auf einer Parabel fixieren wir zwei Punkte A und B. Dann schneidet die Sehne AB aus der Parabel ein Segment. Dessen Flächeninhalt ist gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks ABC mal $\frac{4}{3}$, wobei C der Punkt ist, in dem eine Parallele zu AB die Parabel berührt.

Die folgende Aufgabe soll das Prinzip an einem Zahlenbeispiel erläutern.



Grafik: Peter Bunzel

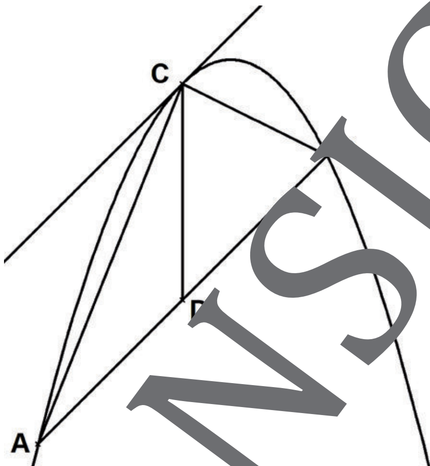
[4] Aus: J. Bemelmanns: Über die Integration der Parabel, die Entdeckung der Kegelschnitte und die Parabel als literarische Figur. In: Report No. 48, 2011. Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Institut für Mathematik, http://www.instmath.rwth-aachen.de/Preprints/bemelmanns20110116.pdf

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit

$f(x) = -x \cdot (x - 4) = 4x - x^2$

Ihr Schaubild ist die Parabel P. A(0|0) und B(3|3) sind zwei Punkte auf der Parabel.



Grafik: Peter ...gel

a) Bestimmen Sie den Punkt C, in dem die Kurve die gleiche Steigung hat wie die Strecke [AB].
Zeigen Sie, dass

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}$$

b) Berechnen Sie den Inhalt A_D des Dreiecks ABC.

Hinweis: Verwenden Sie dabei den Punkt D.

c) Berechnen Sie den Inhalt A_P der Fläche, den die Parabel mit der Strecke [AB] einschließt.

d) Zeigen Sie, dass

$$A_P = \frac{4}{3} \cdot A_D$$