Wurzelfunktionen und Arkussinus

Alfred Müller, Coburg
Illustrationen von Alfred Müller

Dieser Beitrag fordert Ihre Schülerinnen und Schüler heraus – in einem Test diskutieren sie Eigenschaften und Verhalten von zusammengesetzten Funktionen aus Arkussinus-, Wurzel- und gebrochenrationalen Termen und bestimmen Integrale mithilfe der partiellen Integration und Integration über Substitution. Dadurch festigen sie ihr Können und Wissen über Umkehrfunktionen, der Differential- und Integralrechnung.

RAABE, KLASSE SCHULE

Wurzelfunktionen und Arkussinus

Oberstufe (erhöhtes Niveau)

Alfred Müller, Coburg
Illustrationen von Alfred Müller

Die Schüler lernen:

zusammengesetzte Funktionen aus Arkussinus-, Wurzel- und gebrochenrationalen Termen kennen und bestimmen deren Definitionsmengen, Nullstellen, Monotonie, Extrema und Verhalten bei Annäherung an Definitionslücken und -ränder. Die Schülerinnen und Schüler[1] testen ihr bereits erworbenes Wissen und Können über die Umkehrfunktion des Sinus und der Integrations- sowie Differentiationsregeln in einer Lernerfolgskontrolle.

[1] Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im weiteren Verlauf nur noch „Schüler" verwendet.

Hinweise zu Wurzelfunktionen und Arkussinus

Lehrplanbezug

In den Aufgaben des Beitrags wenden die Lernenden ihre Kenntnisse zur Umkehrfunktion des Sinus an und untersuchen zusammengesetzte Funktionen aus Arkussinus-, Wurzel- und gebrochenrationalen Termen. Sie schließen vom Monotonieverhalten auf mögliche Extrema und bestimmen mithilfe der strengen Monotonie Definitions- und Wertemengen sowie Nullstellen der zusammengesetzten Funktionen. Die Jugendlichen skizzieren mithilfe der gewonnenen Eigenschaften Funktionsgraphen und ermitteln anhand von Integrationsregeln Stammfunktionen und Werte von bestimmten Integralen.

Lernvoraussetzungen

Ihrer Klasse sollte die Umkehrfunktion des Sinus, also der Arkussinus, und seine Ableitung bestenfalls bereits bekannt sein. Alternativ besprechen Sie den Arkussinus mit seiner Definitions- und Wertemenge, seiner Ableitung sowie seinem Graphen vor dem Test.

$$f(x) = \sin^{-1}(x) = \arcsin(x); \quad D_f = [-1; 1]; \quad W_f = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Darüber hinaus sollten die Jugendlichen Wurzelfunktionen diskutiert haben und geübt im Umgang mit Integralen sein. Insbesondere die partielle Integration und die Integration über Substitution sollten Ihre Schüler für die Aufgaben 1e) und 2e) kennen und anwenden können.

Einsatzmöglichkeiten

Grundsätzlich ist das Material als Lernerfolgskontrolle gedacht. Die Lösungen sind ausführlich und verständlich formuliert, sodass sich die Lernenden auch selbst testen können.

Falls Ihre Klasse die Lernvoraussetzungen für den Test nicht vollständig erfüllt, setzen Sie das Material statt als Test zur Übung ein und differenzieren je nach Kenntnis- und Leistungsniveau der Jugendlichen. Wenn Sie die Lernerfolgskontrolle prinzipiell lieber als Übung anbieten möchten, bietet sich auch eine Gruppenarbeit an, in der Lernschwächere mit Lernstärkeren synergistisch zusammenarbeiten können.

M 1 Wurzel und Arkussinus – sind Sie fit?

1. Gegeben ist die Funktion f durch ihre Gleichung

   $y = f(x) = -\sqrt{1-x^2} + x \cdot \arcsin x$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_{max}$ und Graphen G_f.

   a) Bestimmen Sie die maximal mögliche Definitionsmenge $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_{max}$ und untersuchen Sie den Graphen G_f auf Symmetrie. **[4 BE]**

   b) Schließen Sie aus dem Monotonieverhalten von f auf die Extremwerte des Graphen. **[4 BE]**

   c) Zeigen Sie, dass die Funktion f im Intervall $\left]\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{4}{5}\right[$ genau eine Nullstelle besitzt. **[4 BE]**

   d) Berechnen Sie $f\left(\frac{1}{2}\right)$ und zeichnen Sie den Graphen G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse. **[4 BE]**

   e) Berechnen Sie den Wert des Integrals $I_1 = \int_0^1 \left(f(x) - (-1)\right)dx$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

   $\left(\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c \text{ darf verwendet werden!}\right)$ **[7 BE]**

2. Durch die Vorschrift $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x}$ ist die Funktion g mit Graphen G_g gegeben.

   a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge $\mathbb{D}_g$ und untersuchen Sie den Graphen G_g auf Symmetrie. **[3 BE]**

   b) Bestimmen Sie die 1. Ableitung $g'(x)$ und untersuchen Sie g und g' bei Annäherung an $x = 0$ und $x = \pm 1$. **[5 BE]**

   c) Zeigen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Graph G_g für $x > 0$ eine waagrechte Tangente besitzt. **[2 BE]**

   d) Zeichnen Sie den Graphen G_g anhand einer Wertetabelle in das unter 1. d) angelegte Koordinatensystem. **[3 BE]**

   e) Berechnen Sie das Integral $I_2 = \int_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{1} g(x)\,dx$. **[4 BE]**

Arbeitszeit: 80 Minuten **Gesamt: [40 BE]**