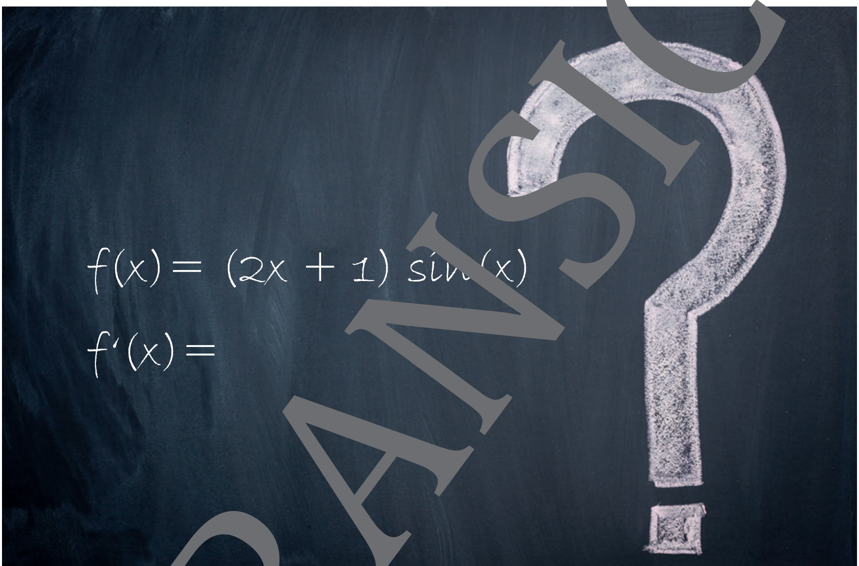
Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionstermen verwenden

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau
Illustrationen von Dr. W. Zappe, Ilmenau



In dieser Unterrichtseinheit üben Ihre Schülerinnen und Schüler anhand von zahlreichen Beispielen und Aufgaben das Ableiten von Funktionstermen mithilfe der Produkt- und der Kettenregel. Sichere Kenntnisse und Fertigkeiten zu diesen Verfahren helfen den Lernenden – neben dem inhaltlichen Verständnis des Ableitungsbegriffs –, wenn sie die Differenzialrechnung inner- oder außermathematisch anwenden. Solche eingeübten Vorgehensweisen helfen den Jugendlichen später im Berufsleben, da sie schon an das korrekte, verständige, schnelle und sichere Abarbeiten von Handlungsvorschriften gewohnt sind.

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek. II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Anna-Greta Wittnebel
Satz: Röser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: © cnythzl/DigitalVision Vectors/Getty Images Plus
Lektorat: Mona Hitzenauer, Regensburg
Korrektorat: Daniela Link, Mönchengladbach

Produkt- und Kettenregel

Oberstufe (grundlegendes und erhöhtes Niveau)

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau
Illustrationen von Dr. W. Zappe, Ilmenau

Die Schüler le…en:

die Produk… …Kettenreg… …r Differenzialrechnung schnell und sicher anzuwenden. Des Wei…eren lerne… …e einige „Tricks“ und Methoden zum Ableiten kennen.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt **LEK** = Lernerfolgskontrolle

Thema	Material	Methode
Ableitung elementarer Funktionen	M1	Ab
Funktionen ableiten mit der Produktregel	M2	Ab
Funktionen ableiten mit der Kettenregel	M3	Ab
Funktionen mit Ketten- und Produktregel ableiten	M4	Ab
Differenzieren nach Logarithmieren	M5	Ab
Grafische Methoden zum Ableiten	M6	Ab
Leistungsfeststellung Gruppe A	M7	LEK
Leistungsfeststellung Gruppe B	M8	LEK

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Kompetenzprofil:

Inhalt: Differenzialrechnung, insbesondere Produkt- und Kettenregel, Differenzieren nach Logarithmieren
Medien: Papier und Bleistift
Kompetenzen: mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), mathematisch kommunizieren (K6)

Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionstermen verwenden

Theorie

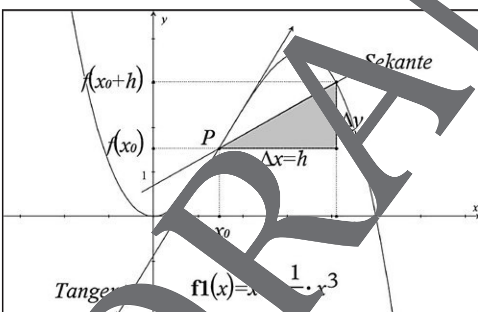
Definition:

Die 1. Ableitung (momentane Änderungsrate; Differentialquo ent) $f'(x_0)$ einer F nk-tion f an der Stelle x_0 ist der Grenzwert $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, fal dieser existiert. Dieser beidseitige Grenzwert existiert, wenn di nseitigen werte exis-tieren (also endliche Zahlen sind) und übereinstim en.

Für die erste Ableitung einer Funktion f(x) schr bt man auch $\frac{df}{dx}$ er $\frac{d}{dx}f(x)$. .

Interpretationen:

– Steigung der Tangente des Graphen v f bei x_0
– Physikalisch z. B. bei der Zeit-Weg-Funktion
Momentangeschwindigkeit zum



© Dr. W. appe

Die Steigung einer Geraden lässt sich mit $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ berechnen. In der Ab-bildung wurden dazu die Punkte P und Q auf dem Graphen der Funk-tion gewählt. Damit ergibt sich:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_q-y_p}{x_q-x_p}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}$$
$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

We n nu er Abstand der Punkte bis zu einem unendlich kleinen Abstand verringert wird, lso h strebt, wird die Sekante zwischen den Punkten zur Tangente, welche ie gleiche Steigung wie die Funktion an der Stelle x_0 besitzt.

Ableitungen elementarer Funktionen

f(x)	k	x^n	$\sqrt{x}$	a^x	e^x
mit	$k \in \mathbb{R}$ konstant	(siehe Hinweis)	$x \geq 0$	$a > 0$	
f′(x)	0	$n \cdot x^{n-1}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$a^x \cdot \ln(a)$	e^x

f(x)	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	$\log_a(x)$	$\ln(x)$
mit			$x \neq \frac{2k+1}{2}\pi;\ k \in \mathbb{Z}$	$x > 0;\ a > 0;\ a \neq 1$	$x > 0$
f′(x)	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$\frac{1}{x}$

Hinweis: Die Ableitungsregel für $f(x) = x^n$ gilt für ganzzahlige Exponenten und, falls $x > 0$ ist, auch für reelle Exponenten.

Ableitungsregeln

Ableitungsregel	**Funktion f(x)**	**Ableitungsfunktion f′(x)**
Faktorregel	$f(x) = a \cdot g(x)$	$f'(x) = a \cdot g'(x)$
Summenregel	$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Produktregel	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Kettenregel	$f(x) = u[v(x)]$	$f'(x) = u'[v(x)] \cdot v'(x)$

M 1 Ableitung elementarer Funktionen

Beispiele:

Ermitteln Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktionen.

- $f(x) = 2x^3$
- $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 3x - 2x^{-1}$
- $f(x) = c \cdot \ln(x) + 0{,}1\sin(x) - 2e^x + c \qquad c \in \mathbb{R}$

Lösungen:

- Anwenden der Faktorregel und der Ableitungsregel für $f(x) = x^n$:

  $f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} = 6x^2 \qquad f''(x) = 6 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 12x$

- Anwenden der Faktor- und der Summenregel sowie der Ableitungsregeln für $f(x) = x^n$, für $f(x) = \sqrt{x}$ und für $f(x) = k$:

  $$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} + 3 \cdot 1 \cdot x^{1-1} - 2 \cdot (-1) \cdot x^{-1-1} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{x}} + 3 + 2 \cdot x^{-2}$$

  $$= \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{-2} + 3$$

  $$f''(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} + 2 \cdot (-2) \cdot x^{-2-1} + 0 = -\frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}} - 4x^{-3}$$

- Anwenden der Faktor- und der Summenregel sowie der Ableitungsregeln für $f(x) = k$, für $f(x) = \ln(x)$, für $f(x) = \sin(x)$ und für $f(x) = e^x$:

  $$f'(x) = c \cdot \frac{1}{x} + 0{,}1 \cdot \cos(x) - 2 \cdot e^x + 0 = \frac{c}{x} + 0{,}1 \cdot \cos(x) - 2 \cdot e^x$$

  $$= c \cdot x^{-1} + 0{,}1 \cdot \cos(x) - 2e^x$$

  $$f''(x) = c \cdot (-1) \cdot x^{-1-1} + 0{,}1 \cdot (-\sin(x)) - 2 \cdot e^x = -c \cdot x^{-2} - 0{,}1 \cdot \sin(x) - 2 \cdot e^x$$

Aufgaben

Schwierigkeitsgrad:

Aufgaben 1 und 2 Aufgabe 4 Aufgabe 5

1. Berechnen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktionen.

   a) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^{\frac{1}{3}}$

   b) $f(t)=\frac{2}{\sqrt{t}}+t$

   c) $g(x)=\frac{x^6-2x^4-4}{6}$

   d) $h(a)=3\cdot\log_{10}a$

2. Berechnen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktionen.
   Formen Sie vorher die Funktionsterme geeignet um bzw. vereinfachen Sie diese.

   a) $f(x)=\frac{\frac{1}{2}x^2-3x+1}{x}$

   b) $g(x)=(3x-2)^2$

   c) $h(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

   d) $k(x)=\sqrt{x}\cdot x^2$

3. Beachten Sie, von welcher Variablen die Funktion abhängt, und bilden Sie jeweils die 1. und 2. Ableitung.

   a) $f(x)=a\cdot x^3+b^2$

   b) $f(a)=a\cdot x^3+b^2$

   c) $f(b)=a\cdot x^3+b^2$

4. Beurteilen Sie die Anzeige des CAS-Rechners.

   $$\frac{d}{dx}\left(\log_{10}(x)\right) \qquad \frac{\log_{10}(e)}{x}$$

5. Begründen Sie, warum die Funktion $f(x)=|x|$ an der Stelle $x_0=0$ nicht differenzierbar ist.

   Hinweis:
   Betrachten Sie die einseitigen Grenzwerte $\left(h\to 0^+;\ h\to 0^-\right)$.

M 2 Funktionen ableiten mit der Produktregel

Beispiel:

Bilden Sie die 1. Ableitung der Funktion $f(x)=(x^2-x)\cdot e^x$ an der Stelle $x_0=2$.

Lösung:

Wir benötigen die Produktregel.

> Sind die Funktionen u(x) und v(x) an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist auch die Funktion $f(x)=u(x)\cdot v(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt:
> $f'(x_0)=u'(x_0)\cdot v(x_0)+u(x_0)\cdot v'(x_0)$.
> **Kurzfassung:** $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$

- Faktoren der zusammengesetzten Funktion identifizieren und einzeln ableiten.
  $u(x)=x^2-x \Rightarrow u'(x)=2x-1$ $\quad$ $v(x)=e^x \Rightarrow v'(x)=e^x$
- Faktoren und ihre Ableitungen nach der Produktregel zusammensetzen.
  $f'(x)=(2x-1)\cdot e^x+(x^2-x)\cdot e^x$
- Falls möglich, den Ableitungsterm vereinfachen.
  $f'(x)=\left[(2x-1)+(x^2-x)\right]\cdot e^x=(x^2+x-1)\cdot e^x$
- Funktionswert der Ableitungsfunktion an der Stelle x_0 berechnen.
  $f'(2)=(2^2+2-1)\cdot e^2=5e^2$

Aufgaben

Schwierigkeitsgrad:

Aufgaben 1 und 2

Aufgaben 3, 4 und 5

1. Ermitteln Sie die jeweils 1. Ableitung der Funktion an der Stelle x_0.

   a) $f(x) = x^3 \cdot \ln(x)$ $\qquad x_0 = 1$

   b) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \cos(x)$ $\qquad x_0 = \pi$

   c) $f(x) = x \cdot 2^x$ $\qquad x_0 = 2$

2. Berechnen Sie jeweils die 2. Ableitung der Funktion.

   a) $f(x) = (2x - 1) \cdot e^x$

   b) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

   c) $f(x) = 2x \cdot h'(x)$

3. Berechnen Sie $f'(x)$ jeweils zunächst mithilfe der Produktregel.
   Berechnen Sie dann $f'(x)$, indem Sie zuvor den gegebenen Funktionsterm umformen.

   a) $f(x) = x^2 \cdot x^4$

   b) $f(x) = x \cdot (x^2 - x)$

   c) $f(x) = (x - 2)(x + 2)$

4. Die Produktregel gilt auch für Produkte aus drei oder mehr Faktoren, z. B. ist
   $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$.
   Testen Sie diese Regel für $f(x) = x \cdot x^2 \cdot x^4$.

5. Berechnen Sie den Anstieg der Tangente an den Graphen der Funktion
   $f(x) = 2x \cdot 2^x \cdot \ln(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$.

M 3 Funktionen ableiten mit der Kettenregel

Beispiel:

Berechnen Sie den Wert der 1. Ableitung von $f(x)=(2x+3)^5$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Lösung:

Wir benötigen die Kettenregel.

Ist die Funktion v an der Stelle x_0 und die Funktion u an der Stelle $v(x_0)$ differenzierbar, so ist auch die verkettete Funktion f mit $f(x)=u(v(x))$ an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt $f'(x_0)=u'(v(x_0))\cdot v'(x_0)$.

In dieser Schreibweise ist u die „äußere" und v die „innere" Funktion. Man sagt auch kurz:
„Die Ableitung einer verketteten Funktion ist gleich dem Produkt der Ableitungen von äußerer und innerer Funktion."

– Äußere und innere Funktion identifizieren und ableiten.

  Äußere Funktion: $u(z)=z^5$; ableiten:

  $u'(z)=5\cdot z^4$ mit $z=v(x)=2x+3$

  Innere Funktion: $v(x)=2x+3$; ableiten:

  $v'(x)=2$

– Das Produkt der äußeren und der inneren Ableitung bilden und vereinfachen.

  $f'(x)=v'(x)\cdot u'(z)=2\cdot 5\cdot z^4=10\cdot(2x+3)^4$

– Den Wert von $f'(x_0)$ berechnen.

  $f'(1)=10\cdot(2\cdot 1+3)^4=10\cdot 5^4=6250$

Aufgaben

Schwierigkeitsgrad:

Aufgabe 1

Aufgaben 2 und 3

Aufgaben 4 und 5

1. Berechnen Sie jeweils den Anstieg der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0.

   a) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ $\qquad x_0=2$

   b) $f(x)=\ln(5x+10)$ $\qquad x_0=1$

   c) $f(x)=\sin(x^2)$ $\qquad x_0=0$

2. Ermitteln Sie die 4. Ableitung von $f(x)=\cos(2x)$.

3. Hinz differenziert $f(x)=\sqrt{5\cdot x^5}$ und gibt als Ergebnis an $f'(x)=\dfrac{25\cdot x^4}{2\cdot\sqrt{5\cdot x^5}}$.

   Kunz verwendet für dieselbe Aufgabenstellung einen CAS-Rechner und erhält das nebenstehende Resultat.

   $$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{5\cdot x^5}\right) \qquad \frac{5\cdot\sqrt{5}\cdot x^4}{2\cdot\sqrt{x^5}}$$

   Klären Sie den scheinbaren Widerspruch zwischen den unterschiedlichen Ergebnisangaben auf.

4. Hat eine verkettete Funktion f eine lineare Funktion $v(x)=a\cdot x+b$ als innere Funktion, dann gilt $\left[f(a\cdot x+b)\right]'=a\cdot f'(a\cdot x+b)$.
   Begründen Sie diese „lineare Kettenregel“ und erläutern Sie deren Anwendung an drei selbstgewählten Beispielen.

5. Bilden Sie die 1. Ableitung der mehrfach verketteten Funktion $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+4}\right)$.

M 4 Funktionen mit Ketten- und Produktregel ableiten

Beispiel:

Bilden Sie die 1. Ableitungen der Funktionen $f(x)=x\cdot e^{-x}$ und $k(x)=\sqrt{x\cdot\sqrt{x}}$.

Lösung:

Analysieren Sie die Struktur des Funktionsterms unter Berücksichtigung der bekannten Ableitungsregeln.

Der Funktionsterm von f(x) lässt ein Produkt aus zwei Teiltermen $g(x)=x$ und $h(x)=e^{-x}$ erkennen, von denen der Term h(x) eine Verkettung aus der äußeren Funktion $u(z)=e^{z}$ mit der inneren Funktion $z=v(x)=-x$ darstellt.	Der Funktionsterm von k(x) lässt eine Verkettung der Funktion $u(z)=\sqrt{z}$ mit $z=v(x)=x\cdot\sqrt{x}$ erkennen, wobei die innere Funktion z = v(x) ein Produkt aus den elementaren Funktionen $g(x)=x$ und $h(x)=\sqrt{x}$ ist.

Prüfen Sie, ob der Term äquivalent umgeformt werden kann, damit er sich einfacher ableiten lässt.

Eine solche Möglichkeit ist für die Funktion f nicht erkennbar.	Der Funktionsterm von k(x) lässt sich vereinfachen: $k(x)=\left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{4}}$

Wenden Sie die Ableitungsregeln „von außen nach innen“ an.

Für die Funktion f wird zunächst die Produktregel und dann die Kettenregel zum Differenzieren angewendet. $f'(x)=1\cdot e^{-x}+x\cdot(-1)\cdot e^{-x}$ $f'(x)=(1-x)\cdot e^{-x}$	Für die Funktion k wird die Potenzregel zum Ableiten angewendet. $k'(x)=\frac{3}{4}\cdot x^{-\frac{1}{4}}$

Aufgaben

Schwierigkeitsgrad:

Aufgabe 4

Aufgaben 1 und 3

Aufgabe 2

1. Bilden Sie jeweils die 1. Ableitung der Funktionen.

   a) $f(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

   b) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x^2)$

   c) $f(x) = x \cdot \sqrt{\sqrt{a + x}}$

   d) $f(x) = 2^x \cdot$ [illegible]$(2x)$

   e) $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) \cdot e^{2x}$

   f) $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(x)}$

2. Stellen Sie einen Term auf, den Sie für die n-te Ableitung von $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ vermuten.

   Hinweis:
   Berechnen Sie dazu die ersten vier Ableitungen und achten Sie auf Muster.

3. Die Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ mit $v(x) \neq 0$ lässt sich auch als Produkt schreiben:

   $f(x) = u(x) \cdot [v(x)]^{-1}$.

   Leiten Sie aus diesem Ansatz die Quotientenregel für die Ableitung von f her:

   $$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

4. Berechnen Sie mithilfe der Quotientenregel jeweils die 1. Ableitung von

   a) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ mit $x \neq 1$ sowie von

   b) $g(x) = \tan(x)$

M 5 Differenzieren nach Logarithmieren

Beispiel:

Bilden Sie die 1. Ableitung der Funktion $y = f(x) = x^x$ mit $x > 0$.

Lösung:

Ist eine Funktion der Form $f(x) = u(x)^{v(x)}$ mit $u(x) > 0$ gegeben, dann kann die Ableitung nach vorhergehendem Logarithmieren gelingen.

$y = x^x$ | beide Seiten logarithmieren

$\ln(y) = \ln(x^x)$ | Logarithmengesetz $\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$ anwenden

$\ln(y) = x \cdot \ln(x)$

Linke Seite mit Kettenregel, rechte Seite mit Produktregel ableiten:

$\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}$ | mit $y = x^x$ multiplizieren

$y' = f'(x) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$

RAABE KLASSE SCHULE

Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!

Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de